

# 用有限元素法進行正壓原始方程式預報

曾 忠 一

中央研究院 物理研究所  
國立台灣大學 大氣科學系

潘 陵 華

李 永 安

中國文化大學地學研究所

國立台灣大學大氣科學系

(中華民國七十一年三月十二日收件，四月二十日修正)

## 摘 要

本文用有限元素法進行正壓原始方程式預報。正壓原始方程式先用 Galerkin 近似轉換為有限元素方程式，經過組合和引進邊界條件的過程以後，得到聯立線性代數方程式，最後用高斯消去法求解。由於微分方程式的 Galerkin 近似會自動滿足原方程式的二次守恆定律，因此可以抑制非線性計算不穩定的產生。時間積分採用跳蛙式，並用 Robert 時間濾波器濾除高頻雜波。

本研究使用六個不同的節點系統，以探討局部區域微細網格的預報問題。在預報過程中，每個時間步驟均計算其總質量和有效能量。研究結果顯示，若使用面積完全相同的元素，則總質量完全保持固定，有效能量的時間變化也微乎其微。若元素面積的變化較大，則總質量和有效能量的時間變化較大，也只不過分別在 0.6% 和 6.5% 以內，遠比有限差分法所得到的時間變化小得很多。此外本研究還對高度場進行波譜分析，研究結果顯示，在時間積分過程中，會激發一些短波，但其能量很小，證明非線性不穩定已獲有效的控制。因此有限元素非常適合於局部區域微細網格的預報問題。

## 一、前 言

這幾年來，用半解析法來求解控制大氣運動的流體力學方程式逐漸流行於國內外氣象界。所謂半解析法包括有限元素法，波譜法以及假波譜法 (Pseudospectral method)。現在已有波譜法的例行天氣預報模式和環流模式 (GARP 1974)，而且波譜法就是古典數學中的固有值展開法 (Eigen function expansion)，因此較為氣象界人士所熟知。有限元素法的發展較晚，起初只能用於結構分析。Melosh (1965) 指出，有限元素法是 Rayleigh-Ritz 法的一種。後來 Szabo 和 Lee (1969) 指出，有限元素方程式可用加權殘差法 (Weighted residual method) 推導出來。這是一項突破，因為這樣就可以用有限元素法來求解任何微分方程式。現在有限元素法已廣泛的用在結構分析，固體力學以及流體力學的各種問題。在氣象學

和海洋學方面，有限元素法也逐漸引起重視。

進行有限元素分析時，先把考察區域分為若干大小不同的元素，並定義若干節點 (Nodes)，每一元素中的變數值可用節點上的變數值來內插，然後用加權殘差法得到局部有限元素方程式 (Local finite element equation)，最後把局部有限元素方程式組合起來，引進邊界條件，得到一組聯立代數方程式，解出此方程式就可得到結果。由有限元素法的特性來看，是非常適合於數值天氣分析與預報。氣象資料是在分佈不規則的測站上觀測得到的。因此可以把測站當作節點，由這些節點可以畫出許多三角形元素，以後的分析和預報都可以直接使用測站上的資料，所得到的分析與預報結果也都是測站上的。曾氏 (1980) 用有限元素法，利用測站上的風場，求得測站上的大氣垂直速度。與有限差分法的結果互相比較，除了上升與下降氣流中心垂直速度的極端值有若干差異外，兩者所得到的

本文曾在民國 69 年 12 月 11 日第二屆全國大氣科學學術研討會中宣讀。本研究是在行政院國家科學委員會專題計畫 NSC - 69M

結果極為相似，也與天氣系統一致。謝氏（1980）用有限元素法，對梅雨天氣資料進行變分分析。王氏（1981）以平衡方程式為約束條件，探討有限元素法的初值化問題。這些人的研究，都是直接用測站上的天氣資料來進行數值天氣分析。因此使用有限元素法可以免除客觀分析的過程，直接使用測站上的天氣資料，所得到的結果也是在測站上的。

局部區域微細網格的預報問題多年來是數值預報工作者常常探討的對象。有些天氣現象因為幅度太小，無法用特定的網格系統完全分辨出來。若全用微細網格，則非常不經濟，而且有些中幅度的天氣系統，例如熱帶氣旋、雷雨羣等，甚至需要短時間的預報，因此局部區域微細網格系統疊上稀疏的粗網格系統的技巧逐漸發展出來。由於波動通過粗細不同的網格系統就好像通過特性不同的介質一樣，會產生反射和折射的現象，因此很容易在兩種分辨率不同的網格系統的界面上激發雜波，引起計算不穩定。現在處理局部區域微細網格的問題，通常用兩個方法，一為單向交互作用（One-way Interaction），另一為雙向交互作用（Two-way Interaction）。單向交互作用就是粗網格的預報值會影響細網格的預報值，但是細網格的預報結果不會對粗網格有任何影響。雙向交互作用則粗細網格的預報值會互相影響。單向交互作用的實驗散見於Hill（1968），和Wang et al（1972）的論文中。一項成功的雙向交互作用實驗是Harrison and Elsberry（1972）進行的，他們利用可移動的局部區域微細網格系統對一維重力波進行研究，獲得的預報結果和全部都使用相同的微細網格系統的結果幾乎一樣。

有限元素法非常適合於局部區域微細網格的預報問題。在需要高分辨率（Resolution）的區域可以使用較小的元素，也就是在這個區域節點的密度較為稠密，其他的區域使用較大的元素。此外元素大小可以緩慢變化，較不會在粗細網格的交界處激發雜波出來，而影響整個預報場。利用有限元素法來進行局部區域微細網格的預報，相當於上面所提到的雙向交互作用，因為全部考察區域中分佈不

規則的節點上，其預報值是互相影響的。因此利用有限元素法，可以按照所需要的分辨率，定出緩慢變化的元素和節點系統，進而預報節點上的氣象變數值。本文將探討用有限元素法進行局部區域微細網格預報的各種問題。

數值預報的過程中，由於非線性的交互作用，會產生假頻誤差（Aliasing error），能量會一直往短波集中，最後會導致非線性不穩定（Phillips 1959）。Arakawa（1966）指出數值預報差分程式必須滿足某些守恒積分式的重要性。假如一微分方程式的差分程式（Finite difference scheme）能滿足原方程式的守恒積分式，則非線性不穩定就能獲得有效的控制。Arakawa（1966，1972）利用正壓渦度方程式的渦度、渦度平方（Enstrophy）以及能量的守恒積分式設計出一個差分程式，可以避免計算不穩定的產生。Sasaki（1976）利用變分最佳分析，使正壓原始方程式在時間積分過程中每一氣象變數均能滿足原方程式質量和有效能量的守恒定律。Fix（1975）指出，微分方程式的Galerkin近似能自動滿足原方程式的二次守恒定律（Quadratic conservative law）。因此使用Galerkin近似的有限元素法和波譜法均能避免非線性不穩定的產生。Jespersen（1974）指出，Arakawa所用的方法和有限元素法所得到的結果一樣。本研究用有限元素法來進行正壓原始方程式的數值預報，探討非線性不穩定的問題。

Robert（1976）指出，資料密集區域的預報誤差，最主要產生在水平方向的分辨率，高達總預報誤差的35%。因此近年來氣象學家所做的努力就是增加水平方向的分辨率，不論在觀測系統或數值方法方面。到現在為止，有限元素法和波譜法的最大用途也在改善水平方向的分辨率。可以預見的是，波譜法能在全球或半球的預報發揮潛力，而有限元素法會在局部區域的預報上獲得進展。

本研究的主要目的在探討有限元素法在數值預報上應用的各種問題，例如局部區域微細網格預報，非線性不穩定以及守恒性質，期待對有限元素法

的數值預報能有更深刻的了解並找出預報方法的新途徑。

## 二、研究方法

本文採用有限元素法來求得淺水方程式的近似解。大氣動力學的數值方法最主要有三種，即有限差分法，波譜法及有限元素法 (GARP 1979)。現在世界先進國家的氣象單位和研究機構均已有限差分法和波譜法的例行天氣預報模式，因此這兩種數值方法較為一般氣象學家所熟知。有限元素法的發展較遲，現在已有許多氣象學家進行這方面的研究工作。有限元素法在數學上可說和波譜法極為相似，兩者合稱半解析法，因為除了必須用一些近似外，微分和積分都用解析法求出。以下將分節對有限元素法和淺水方程式做詳細的討論。

### 1. 有限元素法

波譜法和有限元素法都是把氣象場對一已知函數展開。這已知函數稱為基礎函數 (Basis function)。以二維的情形為例，某一變數  $\phi(x, y)$  可對基礎函數  $\phi_m(x, y)$  展開

$$\tilde{\phi}(x, y) = \sum_m c_m \phi_m(x, y) \quad (1)$$

假如基礎函數只有有限個，當然只是近似解而已，因此在  $\phi(x, y)$  上加上一個符號，來代表近似解。在波譜法中  $c_m$  是廣義的富氏係數 (Fourier coefficients)，而  $\phi_m(x, y)$  通常是微分方程式的固有函數 (Eigenfunction)，而且通常是正交的。例如進行全球數值預報時， $\phi_m(x, y)$  通常用球面調和函數或赫夫函數 (Hough function)。因此波譜法就是一般人所說的固有值展開法，可以求得微分方程式的解析解，只是在數值計算時，必須用有限個而不是無窮多個基礎函數。波譜法最大的缺點是無法處理複雜的邊界條件，但在邊界條件較為簡單的問題，如全球性的大幅度預報，具有相當大的潛力。在有限元素法中， $c_m$  是節點上的變數值。有限元素法中的網格點 (Grid point) 一般稱為節點 (Node)。至於基礎函數  $\phi_m(x, y)$  在有限元素法中是片斷連續的多項

式 (Piecewise polynomial)。

在進行有限元素分析時，先把考察區域劃分為若干大小不同的元素。以二維的情形而言，最簡單的是三角形元素 (圖 1)，當然也可用矩形或四方形的元素。本研究使用三角形元素，每個元素有三個頂點，這就是節點。所有的已知數如風場和高度場都放在節點上，而未知數如風場和高度場的趨勢也都在節點上求得。因此在這方面有限元素法的節點和有限差分法的網格點兩者的作用非常類似。在一元素中某一變數如  $\phi(x, y)$  可用線性內插多項式表示

$$\tilde{\phi}(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (2)$$

$\alpha_1, \alpha_2$  和  $\alpha_3$  可用三個節點上的值求得。設節點  $i, j$  與  $k$  的座標分別為  $(X_i, Y_i), (X_j, Y_j)$  與  $(X_k, Y_k)$ ，又節點上  $\tilde{\phi}(x, y)$  之值分別為  $\phi_i, \phi_j$  與  $\phi_k$  (見圖 2)，則可得到  $\alpha_1, \alpha_2$  和  $\alpha_3$  之值。 $\alpha_1, \alpha_2$  和  $\alpha_3$  之值求得以後，代入(2)式，因此(2)式變為

$$\tilde{\phi}(x, y) = N_i(x, y)\phi_i + N_j(x, y)\phi_j + N_k(x, y)\phi_k \quad (3)$$

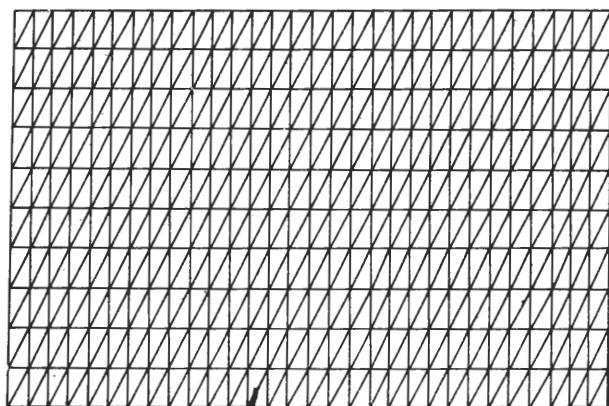


圖 1 節點系統 I

此處

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y)$$

$$N_j = \frac{1}{2A}(a_j + b_j x + c_j y)$$

$$N_k = \frac{1}{2A} (a_k + b_k x + c_k y)$$

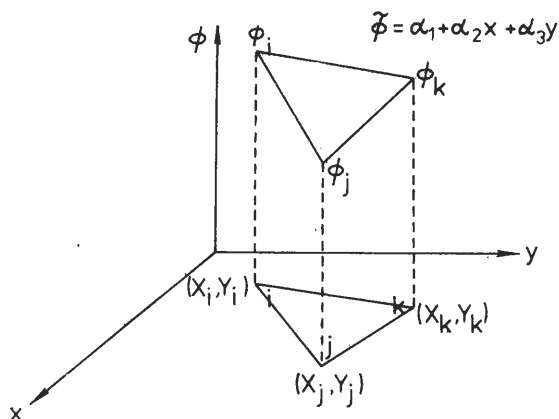


圖2 二維線性三角形元素

$$\begin{aligned} a_i &= X_j Y_k - X_k Y_j & b_i &= Y_j - Y_k & c_i &= X_k - X_j \\ a_j &= X_k Y_i - X_i Y_k & b_j &= Y_k - Y_i & c_j &= X_i - X_k \\ a_k &= X_i Y_j - X_j Y_i & b_k &= Y_i - Y_j & c_k &= X_j - X_i \end{aligned}$$

其中A為三角形的面積。 $N_i$ ， $N_j$ 和 $N_k$ 稱為形狀函數。形狀函數具有一個很特別的性質（見圖3）。例如 $N_i$ 在節點*i*上其值為1，在另外兩個節點*j*和*k*上其值為0。 $N_j$ 和 $N_k$ 也具有類似的性質。某一氣象變數 $\tilde{\phi}(x, y)$ 在一元素中，如(3)式所示，可用節點上之值表示。因此整個氣象場 $\tilde{\phi}(x, y)$ 可用所有的節點上之值表示，這就是(1)式中

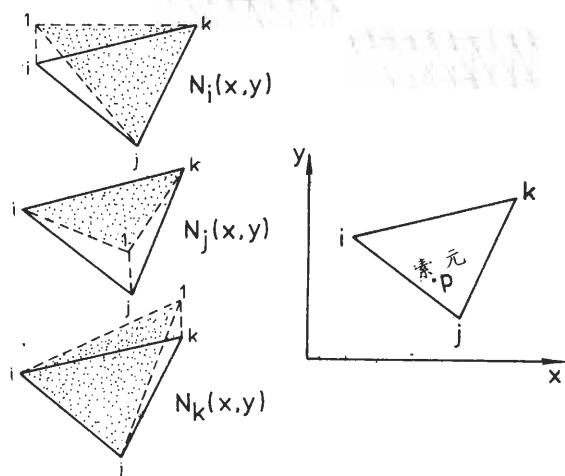


圖3 三角形元素的內插性質，元素內任意點之變數值可以三頂點之值表示。

的表示法。換句話說，某一節點的形狀函數就是元素中該節點的基礎函數。在有限元素中使用形狀函數較為方便。因此在一元素中我們說的是形狀函數，而以整個場而言我們討論基礎函數。

假如要解出的微分方程式具有下列形式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + L[\phi(x, y, t)] - f(x, y) = 0 \quad (4)$$

其中L為二維算符。我們將近似解 $\tilde{\phi}$ 對基礎函數展開以後，再代回(4)式得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_m c_m \phi_m(x, y) + L[\sum_m c_m \phi_m(x, y)] \\ - f(x, y) = \varepsilon \end{aligned} \quad (5)$$

因為 $\tilde{\phi}$ 只是近似解，不能完全滿足(4)式，右邊不會等於0，而有一殘差 $\varepsilon$  (Residual)。假如我們令殘差和基礎函數正交，即

$$\iint \varepsilon \phi_n(x, y) dx dy = 0 \quad (6)$$

其中n的範圍和m的範圍一樣，也就是說，我們用幾個基礎函數，(6)式就代表幾個方程式，這就是Galerkin近似。有限元素法最常用的近似就是Galerkin近似，波譜法也用這種近似。(5)式中的展開係數 $c_m$ 現在是時間t的函數，(6)式代表聯立方程式，可以求出 $\partial c_m / \partial t$ ，然後用適當的時間差分程式就可以進行預報了。在波譜法的情形下，基礎函數是正交的，因此在求解 $\partial c_m / \partial t$ 時實際上不需要解聯立代數方程式。可是在有限元素法的情形下，基礎函數不是正交的，因此最大問題在於求解龐大的聯立方程式，因為考察範圍內有幾個節點，就有幾個未知數。(6)式是一個積分式，因此被積的函數只要可積(Integrable)就可以，也就是說只要片斷連續就可以了。此外，在整理(6)式以使得得到聯立代數方程式時，必須用到微分和積分，這都是用解析法求得的。(6)式也可以解釋為

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint \varepsilon^2 dx dy = 0$$

其中 $\dot{c}_m \equiv \partial c_m / \partial t$ 。這就是令殘差的平方為極小。因此Galerkin近似和最小均方差(Least mean square error)是相當有關係的。Fix (1975)

指出，Galerkin 近似法所得到的解會自動滿足原方程式所具有的二次守恒定律 (Quadratic conservative law)。因此，有限元素法和波譜法同樣的具有令人滿意的數學性質。

在進行有限元素分析時，實際上不用基礎函數，而是用形狀函數。因此在一元素中，(5)式變為

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\gamma} N_{\gamma} \phi_{\gamma} + L \left( \sum_{\gamma} N_{\gamma} \phi_{\gamma} \right) - f(x, y) = \epsilon$$

而(6)式變為

$$\iint_A \epsilon N_{\gamma}(x, y) dx dy = 0 \quad \gamma = i, j, k \tag{7}$$

其中

$$\sum_{\gamma} N_{\gamma} \phi_{\gamma} \equiv N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k$$

### 2 正壓原始方程式

本研究所使用的預報模式為二維非線性的淺水方程式，又叫正壓原始方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f v \tag{8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - f u \tag{9}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (u \phi) - \frac{\partial}{\partial y} (v \phi) \tag{10}$$

其中  $\phi$  是重力位，其他的符號和一般所用的相同。這組淺水方程式足以約略的描述大氣的大幅度運動。此外這組方程式的物理現象不但具有位相速度緩慢的羅士培波，同時也有快速運行的慣性重力波。在中緯度地區這種慣性重力波的幅度遠比現有的觀測網所能測得的大氣現象的幅度小得很多，因此通常被認為是大幅度預報的雜波。由於這種雜波的位相速度很快，若不加以有效的控制，會污染整個預報場。本研究利用有限元素法探討這組預報模式計算不穩定的控制以及若干有限區域微細網格的預報問題。

淺水方程式具有質量守恆積分式

$$M = \iint \phi dx dy = \text{常數} \tag{11}$$

和有效能量守恆積分式

$$E = \iint \frac{1}{2} [\phi(u^2 + v^2) + (\phi - \Phi_0)^2] dx dy = \text{常數} \tag{12}$$

其中  $\Phi_0$  是平均起始重力位。數值預報模式的時間積分差分程式對預報結果的影響很大。除了差分程式的一致性、穩定性以及收斂性外，一般設計的差分程式並不一定會滿足上面兩個守恆積分式。Arakawa (1966) 指出差分程式必須滿足原方程式所具有的守恆積分式。

Sasaki (1976) 利用變分原理使淺水方程式在時間積分過程中每一氣象變數均滿足上述兩個守恆積分式，來控制計算不穩定和雜波的產生。Fix (1975) 指出，微分方程式的 Galerkin 近似能自動滿足原方程式所具有的二次守恒定律 (Quadratic conservative law)。因此可以用有限元素法來設計數值程式，滿足原方程式的守恒定律。淺水方程式的能量守恆積分式並不是二次守恒定律，但假如重力位的擾動不大時，(12)式中動能項的  $\phi$  幾乎是常數，因此(12)式也就約略是二次守恒定律了。本研究在時間積分過程中每個時間步驟均計算其總質量(11)式和有效能量(12)式，以探討計算不穩定的控制。

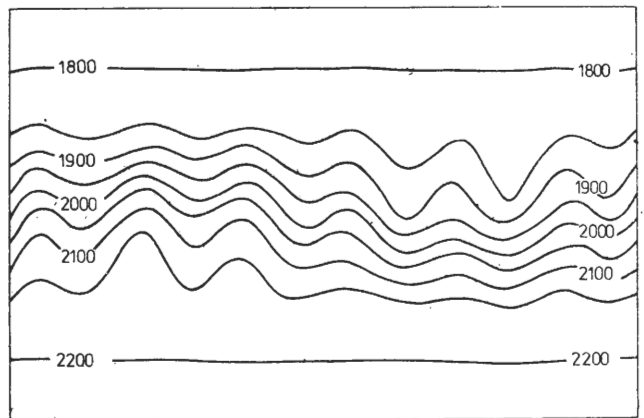


圖 4 起始高度場 單位：m

起始高度場為一個波和六個波合成的正弦波型態(圖4)。Grammelvedt (1969) 也曾利用這種起始高度場來討論淺水方程式的數值程式和邊界

條件。這種起始高度場的形式如下：

$$h(x, y) = H_0 + H_1 \tanh \frac{9(y - y_0)}{2D} + H_2 \operatorname{sech}^2 \frac{9(y - y_0)}{2D} (0.8 \sin \frac{2\pi x}{L} + 0.5 \sin \frac{12\pi x}{L}) \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} y_0 &= D/2 & L &= 6000 \text{ km} \\ H_0 &= 2000 \text{ m} & D &= 4000 \text{ km} \\ H_1 &= -220 \text{ m} & H_2 &= 133 \text{ m} \end{aligned}$$

(13)式中的  $L$  和  $D$  分別為本研究考察範圍的長度和寬度。至於起始風場，則用兩種基本假設求得。一為地轉風場，即

$$u = -\frac{1}{f} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad v = \frac{1}{f} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \beta(y - y_0) \\ f_0 &= 10^{-4} \text{ sec}^{-1} \\ \beta &= 1.5 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ sec}^{-1} \end{aligned}$$

另一為無輻散平衡風場。先用平衡方程式

$$\nabla \cdot f \nabla \Psi = \nabla^2 \phi \quad (15)$$

可以求得流線函數  $\Psi$ 。流線函數求得以後，可用下式二式求得無輻散風場

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (16)$$

本研究採用恒定的邊界條件，即邊界條件不隨時間的變化而不同。在東西方向本文採用週期性的邊界條件。在南北邊界上假設大氣與外界並無質量的傳送。也就是說，在南北邊界上

$$v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

### 3. 局部有限元素方程式

現在可以用 Galerkin 近似把淺水方程式，守恒定律以及初值化的方程式轉換為局部有限元素方程式。所有的氣象變數均可用節點值和形狀函數表示（見(3)式），例如

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &= N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k \equiv \sum_{\alpha} N_{\alpha} \phi_{\alpha} \\ \tilde{u} &= N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k \equiv \sum_{\alpha} N_{\alpha} u_{\alpha} \\ \tilde{v} &= N_i v_i + N_j v_j + N_k v_k \equiv \sum_{\alpha} N_{\alpha} v_{\alpha} \end{aligned} \quad (17)$$

現在以連續方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\varphi \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left( u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (18)$$

為例，解釋導出的過程。由(7)式我們得到

$$\begin{aligned} &\iint \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} N_T dx dy \\ &= -\iint \tilde{\phi} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) N_T dx dy \\ &\quad - \iint \left( \tilde{u} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \right) N_T dx dy \end{aligned}$$

將(17)式代入上式可得

$$\begin{aligned} &\iint \sum_{\beta} N_{\beta} N_T \dot{\phi}_{\beta} dx dy \\ &= -\iint \sum_{\beta} N_{\beta} \phi_{\beta} \left( \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\alpha} N_{\alpha} u_{\alpha} + \frac{\partial}{\partial y} \sum_{\alpha} N_{\alpha} v_{\alpha} \right) N_T dx dy \\ &\quad - \iint \left\{ \sum_{\beta} N_{\beta} u_{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\alpha} N_{\alpha} \phi_{\alpha} + \sum_{\beta} N_{\beta} v_{\beta} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{\alpha} N_{\alpha} \phi_{\alpha} \right\} N_T dx dy \end{aligned}$$

我們再用下列微分和積分的公式（Segerlind, 1976）

$$\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x} = \frac{b_{\alpha}}{\partial A} \quad \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} = \frac{c_{\alpha}}{\partial A} \quad \alpha = i, j, k \quad (19)$$

$$\iint_A N^p N_j^q N_k^r dx dy = \frac{p! q! r!}{(p+q+r+2)!} 2A \quad (19)$$

可以得到下列連續方程式的局部有限元素方程式

$$\begin{aligned} 2A \dot{\tilde{\phi}} &= -\sum_{\alpha} (b_{\alpha} u_{\alpha} + c_{\alpha} v_{\alpha}) \tilde{S} \phi \\ &\quad - \sum_{\alpha} c_{\alpha} \phi_{\alpha} \tilde{S} v - \sum_{\alpha} b_{\alpha} \phi_{\alpha} \tilde{S} u \end{aligned} \quad (20)$$

其中  $\underline{S}$ ,  $\underline{\dot{\phi}}$ ,  $\underline{\phi}$ ,  $\underline{u}$  及  $\underline{v}$  均為矩陣, 其意義如下

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\dot{\phi}}^T = (\dot{\phi}_i \quad \dot{\phi}_j \quad \dot{\phi}_k)$$

$$\underline{\phi}^T = (\phi_i \quad \phi_j \quad \phi_k)$$

$$\underline{u}^T = (u_i \quad u_j \quad u_k)$$

$$\underline{v}^T = (v_i \quad v_j \quad v_k)$$

值得注意的是(18)式和(19)式都是用解析法求得的公式

。其他的方程式不再詳細推導, 只寫在下面:

$x$  方向動量方程式 (即(8)式)

$$2AS\underline{\dot{u}} = -4 \sum_{\alpha} b_{\alpha} \phi_{\alpha} \underline{1} - \sum_{\alpha} b_{\alpha} u_{\alpha} \underline{S} \underline{u} - \sum_{\alpha} c_{\alpha} u_{\alpha} \underline{S} \underline{v} + \frac{2A}{5} B \tag{21}$$

$y$  方向動量方程式 (即(9)式)

$$2AS\underline{\dot{v}} = -4 \sum_{\alpha} c_{\alpha} \phi_{\alpha} \underline{1} - \sum_{\alpha} b_{\alpha} v_{\alpha} \underline{S} \underline{u} - \sum_{\alpha} c_{\alpha} v_{\alpha} \underline{S} \underline{v} - \frac{2A}{5} C \tag{22}$$

地轉關係式 (即(4)式)

$$2AS\underline{u} = -4 \frac{1}{f} \sum_{\beta} c_{\beta} \phi_{\beta} \underline{1} \tag{23}$$

$$2AS\underline{v} = -4 \frac{1}{f} \sum_{\beta} b_{\beta} \phi_{\beta} \underline{1} \tag{24}$$

平衡方程式 (即(15)和(16)式)

$$\frac{f}{2A} \sum_{\beta} (b_{\beta} b_r + c_{\beta} c_r) \Psi_{\beta} = \frac{1}{2A} \sum_{\beta} (b_{\beta} b_r + c_{\beta} c_r) \phi_{\beta} \tag{25}$$

$$2AS\underline{u} = -4 \sum_{\beta} c_{\beta} \Psi_{\beta} \underline{1} \tag{26}$$

$$2AS\underline{v} = 4 \sum_{\beta} b_{\beta} \Psi_{\beta} \underline{1} \tag{27}$$

質量守恒定律 (即(11)式)

$$M = \frac{2A}{6} (\phi_i + \phi_j + \phi_k) \tag{28}$$

能量守恒定律 (即(12)式)

$$E = \frac{2A}{120} \{ \sum_{\alpha} \phi_{\alpha} [ (\sum_{\beta} u_{\beta})^2 + (\sum_{\beta} v_{\beta})^2 ] + \phi_i (2u_i^2 + 2v_i^2 - u_j v_k - v_j v_k) + \phi_j (2u_j^2 + 2v_j^2 - 2u_k u_j - v_k v_i) + \phi_k (2u_k^2 + 2v_k^2 - u_i u_j - v_i v_j) \} + \frac{2A}{24} [ \phi_i' (\phi_i' + \phi_j') + \phi_j' (\phi_j' + \phi_k') + \phi_k' (\phi_k' + \phi_i') ]$$

其中  $\phi_{\alpha}' = \phi_{\alpha} - \Phi_0 = \phi_{\alpha} - gH_0$ 。上面所列出的式子中, 尚有一些符號需要定義

$$\underline{\dot{u}}^T = (\dot{u}_i \quad \dot{u}_j \quad \dot{u}_k)$$

$$\underline{\dot{v}}^T = (\dot{v}_i \quad \dot{v}_j \quad \dot{v}_k)$$

$$\underline{1}^T = (1 \quad 1 \quad 1)$$

$$\underline{B}^T = (B_1 \quad B_2 \quad B_3)$$

$$B_1 = 2 \sum_{\alpha} f_{\alpha} \sum_{\beta} v_{\beta} + 4 f_i v_i - f_k v_j - f_j v_k$$

$$B_2 = 2 \sum_{\alpha} f_{\alpha} \sum_{\beta} v_{\beta} + 4 f_j v_j - f_i v_k - f_k v_i$$

$$B_3 = 2 \sum_{\alpha} f_{\alpha} \sum_{\beta} v_{\beta} + 4 f_k v_k - f_j v_i - f_i v_j$$

$$\underline{C}^T = (C_1 \quad C_2 \quad C_3)$$

$$C_1 = 2 \sum_{\alpha} f_{\alpha} \sum_{\beta} u_{\beta} + 4 f_i u_i - f_k u_j - f_j u_k$$

$$C_2 = 2 \sum_{\alpha} f_{\alpha} \sum_{\beta} u_{\beta} + 4 f_j u_j - f_i u_k - f_k u_i$$

$$C_3 = 2 \sum_{\alpha} f_{\alpha} \sum_{\beta} u_{\beta} + 4 f_k u_k - f_j u_i - f_i u_j$$

$$\frac{1}{\underline{f}} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha} \frac{1}{f_{\alpha}}$$

(20)式至(29)式的局部有限元素方程式中, 等號並不是真的左右兩邊相等, 這只是習慣性的寫法而已, 必須經過組合 (Assemblage) 以後, 才能得到全域有限元素方程式 (Global finite element equation), 這就是我們所需求解的聯立線性代數方程式。局部有限元素方程式的作用和有限差分法的差分程式相類似, 只要把局部有限元素方程式求出以後, 其他的步驟諸如組合, 引進邊界條件以及求解都必須藉助計算機程式, 我們實際上無法也

不必要親自看到全域有限元素方程式。假如使用  $n$  個節點，就有  $n$  個全域有限元素方程式，若邊界上某未知數有  $m$  個為已知，則引進邊界條件以後，只剩下  $q = n - m$  個聯立代數方程式。 $q$  個聯立代數方程式，其係數矩陣是  $q \times q$  的對稱方陣。若  $q$  很大時，則所需的計算機記憶和計算時間非常龐大。一般研究大氣大幅度運動時，大致使用兩三百個網格點。以有限元素法的觀點來看，就是要使用兩三百個節點才能充分描述大氣現象。若每個節點只有一個未知數，則係數矩陣就需要四萬個以上的記憶，這是連大型計算機都無法處理的問題。有限元素法得到的係數矩陣有三個特點。第一是係數矩陣是對稱的。這個特點就可以減少大約一半的記憶了。第二個特點是係數矩陣中非零項很少，這不但可以節省記憶，也可以節省計算時間。第三個特點是非零項集中在對角線性附近，也就是說係數矩陣具有一定的帶寬 (bandwidth)。假如特別考慮係數矩陣的特性，使用特定的矩陣儲存法，可以減少矩陣所需的記憶，同時也可以節省求解的時間。本研究使用變帶寬矩陣的儲存法 (Bath and Wilson 1976, Fellipa 1975)，可以減少 90% 的記憶。此外在解聯立方程式方面，現在也發展出許多有效的解法 (Fellipa 1975)，可以節省許多計算時間。

### 三、研究結果

本研究採用六種不同的節點系統，來探討其計算不穩定性。首先使用兩種最簡單的節點系統，以做為測試計算機程式之用，此外也可以當作互相比較的基準。節點系統 A 1 (圖 5) 為正方形的元素，每個元素有 4 個節點。這種節點系統的計算結果可以直接和有限差分法的結果互相比較。由於正方形元素的局部有限元素方程式甚為複雜，故不在此列出。共有 294 個元素，315 個節點。由圖 5 可以看出，總共有 330 個節點，但本文使用週期性的邊界條件，因此東西兩邊界上的節點編號是一樣的，因此少了 15 個節點。

節點系統 A 2 (圖 6) 使用大小相同的三角形

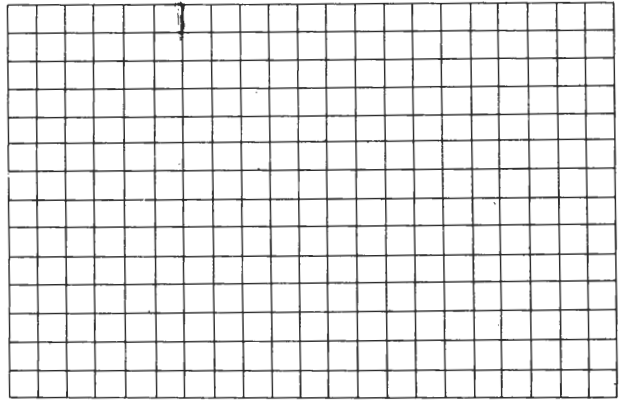


圖 5 節點系統 A 1，為正方形元素

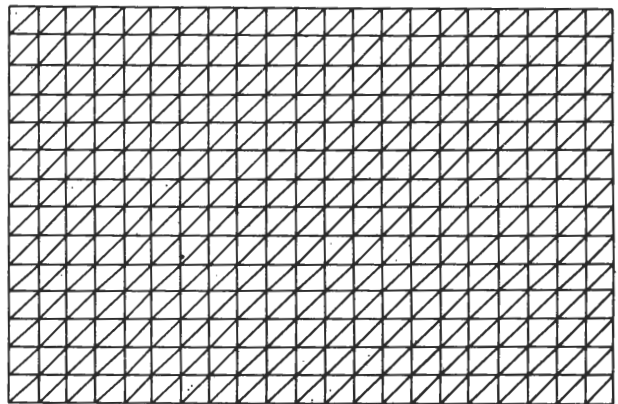


圖 6 節點系統 A 2，為等面積的三角形元素。共有 315 個節點，588 個元素。這種節點系統的三角形元素是由正方形元素等分得來的，元素比較多，分辨率 (Resolution) 較大，但根據別人的研究 (Segerlind 1976)，用這種節點系統所得到的計算結果，並不會比圖 5 的正方形元素更理想。本研究的計算結果，也證實這個說法。

除了上面所說的兩種等積元素的節點系統外，本研究也使用四個元素大小不同的節點系統，這樣可以探討有限區域微細網格問題。節點系統 I (圖 1) 在經度方向為高分辨率，緯度方向為低分辨率，但兩方向的節點都是規則的。共有 341 個節點，600 個元素。

節點系統 II (圖 7) 在經度方向的間隔完全一樣，而在緯度方向間隔有變化，共有 242 個節點，



420 個元素。

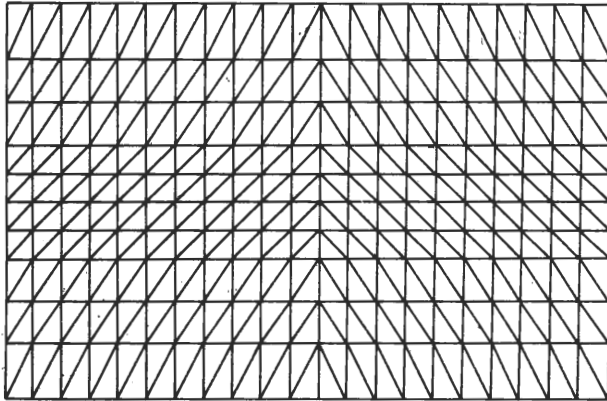


圖 7 節點系統 II

節點系統 III (圖 8) 在經度方向有一次間隔變化，而在緯度方向有 5 次緩慢的間隔變化，共有 270 個節點，476 個元素。

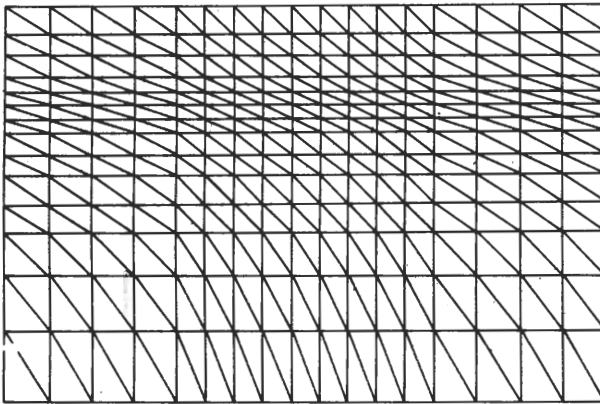


圖 8 節點系統 III

節點系統 IV (圖 9) 在經向有 4 次緩慢的間隔變化，在東西界的中心分辨率最高，在緯度方向有 3 次緩慢的間隔變化，在南北界的中心間隔最小。共有 286 個節點，504 個元素。

上面說過，本文在經度方向使用週期性的邊界條件，因此在東西兩邊界上位置相同的節點編號一樣，也就是代表同一個節點。但是為了方便計算元素面積起見，必須用另外一組節點編號。因此需要使用兩組編號。

每個節點都必須加以編號。編號的技巧對節省

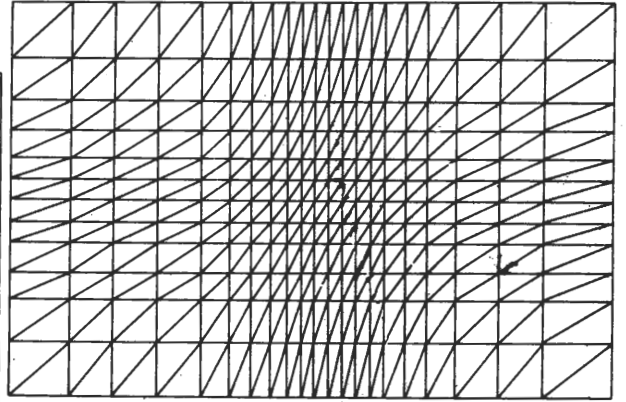


圖 9 節點系統 IV

計算機記憶和計算時間大有關係。因此許多人 (Collins 1973, Gibbs et al 1976, King 1970) 從事這方面的研究，設計自動編號的計算機程式。由於本研究使用的節點系統還算是相當的有規則，而且又有週期性邊界條件的限制，因此本研究只按一般的原則進行編號。

局部有限元素方程式導出來以後，其他的求解過程，諸如組合、邊界條件的進入以及線性聯立方程式的求解完全藉助計算機程式。本文參考 Bath and Wilson 1976 的書，已設計一套完整的計算機程式，可以有效的進行有限元素分析。

每個節點的  $u$ ,  $v$  和  $\phi$  求出來以後，可以用任何合理的時間差分程式求得下一個時間步驟 (Time step) 的  $u$ ,  $v$  和  $\phi$  值，如此就可以進行預報了。時間積分不得不採用有限差分法，如同波譜法一樣，有限元素法最主要的目的在於改善空間的分辨率，以氣象學的觀點而言，有限元素法和波譜法的使用在於改善水平方向的分辨率。本文在時間積分時採用跳蛙式 (Leapfrog scheme)，可是使用跳蛙式時，會產生每個時間步驟均會改變符號的計算性的數值解 (Computational mode) (Mesinger and Arakawa 1976)。這樣會產生解的分離，也就是說兩相鄰時間步驟的解會變為不相關，產生兩個時間隔的短波 (Two-grid interval wave)，最後導致計算不穩定。為了避免產生週期為兩個時間間隔 ( $2\Delta t$ ) 的高頻雜波，本研究

使用羅勃時間濾波器 (Robert's time filter) (Asselin, 1972), 以抑制這種解的分離和雜波的產生。設求得的變數  $\phi$  的趨勢為  $\dot{\phi}$ , 即

$$\dot{\phi} = F(\phi, t)$$

則羅勃時間濾波器具下列的形式

$$\begin{aligned} \phi^*(t + \Delta t) \\ = \phi(t - \Delta t) - 2\Delta t F(\phi^*, t) \quad (30) \\ \phi(t) = \phi^*(t) + \alpha [\phi^*(t + \Delta t) - 2\phi^*(t) \\ + \phi(t - \Delta t)] \quad (31) \end{aligned}$$

其中  $\Delta t$  是時間步驟,  $\alpha$  是濾波參數, 帶有星號的變數是暫時求得值, 不帶星號的是經過濾波以後的變數值。(30) 式就是先用跳蛙式時間差分以求得下一個時間步驟的  $\phi$  值, 然後用(31)式的簡易濾波器來濾波。實際使用時,  $\alpha$  的定值定為 0.02, 根據 Asselin (1972) 的分析, 經過 100 個的時間步驟以後, 計算性的振幅會減少原來的百分之二左右, 而物理性的振幅衰減得很少。因此羅勃時間濾波器會對毫無意義的計算性解進行選擇性的濾除。

在時間積分的過程中, 本研究對有效能量  $E$  和總質量  $M$  在每個時間步驟都做計算, 以進行穩定度分析。若有效能量超過起始有效能量百分之五十以上, 則停止計算機的運算。實驗初期時間步驟  $\Delta t$  取為 450 秒, 結果節點系統 A 1 和 A 2 為穩定, 但節點系統 I、II、III 和 IV 皆為不穩定。後來採用  $\Delta t = 300$  秒, 後四種節點系統均為穩定。Cullen (1973) 對二維平流方程式而言, 有限元素法的時間間距應為有限差分法的  $1/\sqrt{3}$  倍, 即有限差分法的  $\Gamma = c\Delta t/\Delta x < 1/\sqrt{2}$  時, 有限元素法的  $\Gamma < 1/\sqrt{6}$ 。本文中仍沿用上述 CFL 條件以抑制線性不穩定的產生。Thacker (1978 a, b) 曾以有限差分法和有限元素法對一維和二維的重力波運動做過研究。他指出—維重力波運動中, 若取用 CFL 條件所允許的最大時間間距時, 有限差分法的結果較接近真解, 有限元素法則高估位相速度。若取  $\Delta t$  使  $\Gamma = 0.4/\sqrt{3}$  時, 則有限元素法的位相速度較近於真解, 但會高估長波的位相速度, 而低估高頻短波的位相速度。有限差分法若取  $\Gamma = 0.4$  時, 不論長短波均會低估其位相速度, 當波數愈多時誤差愈大。  $\Gamma$  值愈小時, 有限元素法較有

限差分法的結果為正確。本文中所用的時間步驟均滿足 CFL 條件。

高度場與風場經時間積分以後, 每隔 24 小時做一次高度場的波譜分析, 以了解高度場在波數域中的分佈情形。(圖 10) 為起始高度場的波譜圖。其中  $d$  為 285.7 公里,  $k$  和  $l$  分別為  $x$  方向和  $y$  方向的波數。本來高度場都是在節點上計算得到的, 為了進行波譜分析, 我們先把高度場內插到正方形的網格上(圖 5), 因此  $d$  就是圖 5 的網格間距。圖 10 的左上角代表波數為零, 右下角代表  $x$  方向和  $y$  方向均為圖 5 網格系統所能分辨出的最短波。又圖 10 中的數字代表 10 的冪次, 即若圖中的數字為 5, 則代表  $10^5$ , 由於單位在波譜分析中並不重要, 故未列出。由圖 10 可以看出, 高度場都集中在長波上, 即在左上角附近。

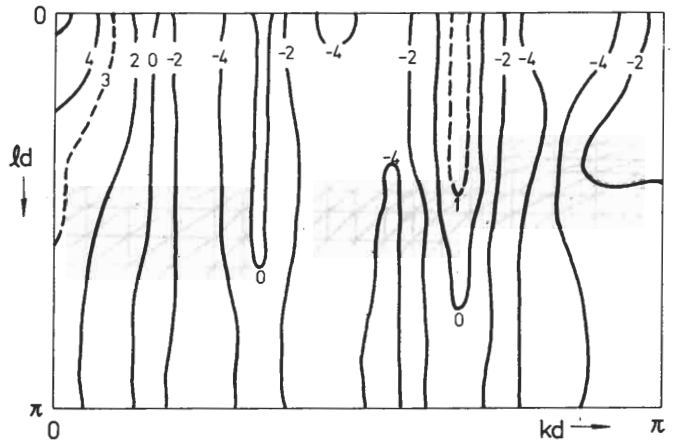


圖 10 起始能量分佈圖

波譜分析的結果顯示, 若起始風場為地轉風時, 節點系統 A 1 和 A 2 均不會激發短波, 而系統 I、II、III 和 IV 均會激發波長為 1000 公里以下的雜波。系統 I 在 48 小時後有小部份能量分佈在短波上, 系統 II 在  $x$  方向均有廣泛的能量分佈(圖 11)。系統 III 在接近 72 小時才有雜波的激發。系統 IV 和系統 II 一樣普遍的激發短波, 且情況稍為嚴重。

若起始風場為無輻散平衡風場, 則系統 A 1 和 A 2 也不會激發短波, 系統 I 在 48 小時以後高度場才會有短波出現。系統 II 則發生於時間積分的大部份過程中(圖 12)。系統 III 則自 24 小時以後

就有雜波的產生。系統IV自48小時後雜波才出現。

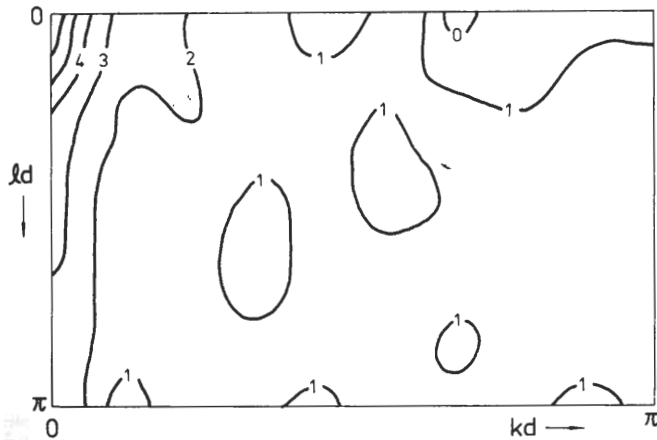
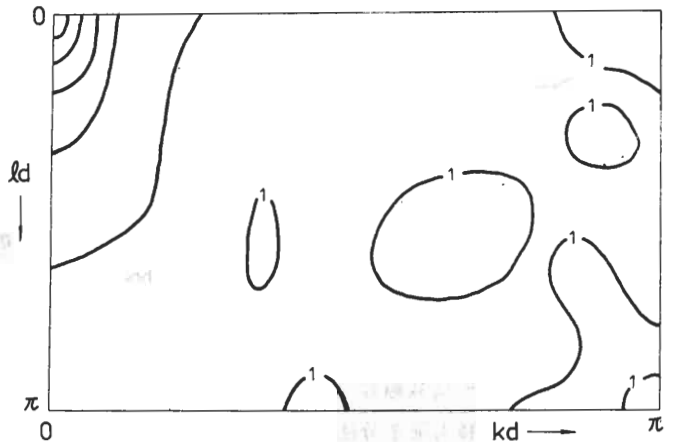


圖 11 預報 72 小時之能量分佈圖，節點系統 II，起始條件為地轉風場

圖 12 預報 72 小時後之能量分佈圖，節點系統 II，起始條件為無輻散平衡風場



波譜分析的結果顯示，用均勻劃一的元素，如系統 A 1 和 A 2，較不會激發短波。此外，不論起始風場或無輻散平衡風場，較低分辨率的節點系統（如系統 II）激發雜波的時間較早。在地轉平衡的起始條件下，節點系統較規則的（如系統 I）比不規則的（如系統 II）所激發雜波的程度較輕微。在無輻散平衡的起始條件，低緯地區分辨率愈低者（如系統 III）激發雜波的情況較嚴重。

時間積分過程中，我們都計算有效能量及總質量，並與起始有效能量與總質量做比較分析，如圖 13 與圖 14。由圖中可以看出，節點系統 I、II、III 和 IV 而言，跳蛙式的時間差分中的有效能量的變化在時間積分三天的過程中，均呈振盪型態，而且振幅均在起始有效能量的 6.5% 以內。另外，節點系統 A 1 和 A 2 的有效能量的時間變化，均在起始

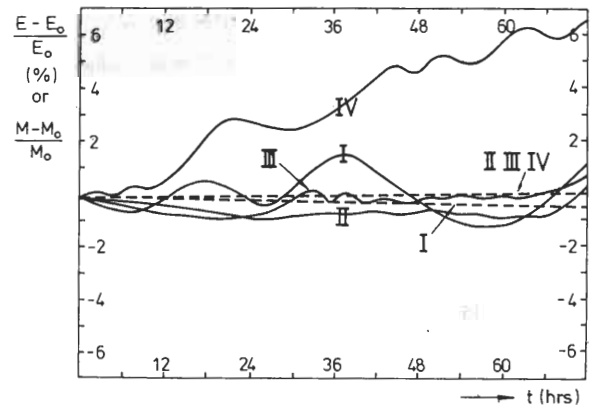


圖 13 有效能量與總質量在數值積分期間之差異比較，實線為有效能量，虛線為總質量，起始條件為地轉風場

有效能量的 1% 以內（未在圖中顯示）。因此這個實驗證實了有效能量的守恆定律。地轉平衡的起始

條件下(圖 13)，最大的振盪振幅為起始有效能量的 6.5%，發生在節點系統 IV，系統 III 的振幅次之，至於系統 I 和系統 II 的振幅只在 1% 以下。因此若節點系統的元素大小變化劇烈者，其有效能量激增的機會較大。無輻散平衡的起始條件下(圖 14)，最大振幅為 6.3%，發生在系統 III。系統 III 的節點分佈情形是低緯區的節點較為稀疏，元素面積較大，因此截斷誤差較大，效果較差。系統 I 的有效能盪振幅次之，系統 II 和系統 IV 則較小。

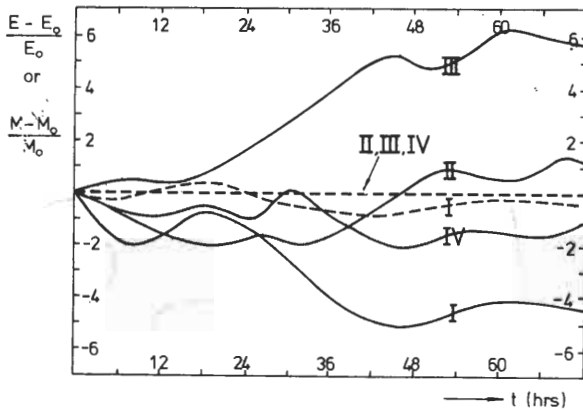


圖 14 有效能量與總質量在數個積分期間之百分比比較，實線為有效能量，虛線為總質量，起始條件為無輻散平衡風場

圖 15 為各種有限差分法所得到的有效能量時間變化圖(見曾氏, 1977)。圖中振盪比較小的兩個是用跳蛙式時間差分程式，有效能量隨時間減小的三條線是用 Euler backward 差分程式。圖中顯示，若用跳蛙式，則其有效能量的振幅會超過起始有效能量的 15% 以上。若用 Euler backward 程式，則有效能量在積分 60 小時的過程中一直衰減。本來由(2)式得知，正壓原始方程式的有效能量應當一直保持固定。若用有限差分法，則有效能量的時間變化較大，若用有限元素法，即使使用大小不同的元素，有效能量的時間變化振幅較小，這是因為 Galerkin 近似能自動滿足原方程式的二次守恆定律。

至於總質量的時間變化更是微乎其微(圖 13 和圖 14)，至多只有起始總質量的 0.6%。就系統 A 1 和 A 2 而言，其總質量的時間變化只有百萬

分之一而言。事實上我們可以證明，Galerkin 近似會使總質量完全保持固定。

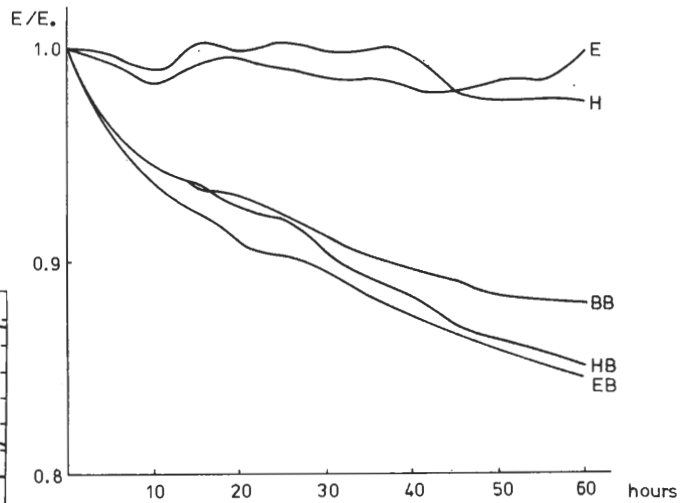


圖 15 各種有限差分法的有效能量時間變化(曾氏 1977)

#### 四、結論與建議

本研究用有限元素法進行正壓原始方程式的數值預報。正壓原始方程式首先用 Galerkin 近似轉換為局部有限元素方程式，經過組合和引進邊界條件的過程後，得到聯立代數方程式，最後用高斯消去法求解。由於 Galerkin 近似會自動滿足原方程式的二次守恆定律，因此可以抑制非線性不穩的產生。時間積分採用跳蛙式，並用羅勃時間濾波器濾除高頻雜波，以防止使用跳蛙式時所產生的數值解的分離。

本研究使用六個節點系統，以探討局部區域微細網格的預報問題。在時間積分過程中，每個時間步驟都計算其總質量及有效能量。研究結果顯示，若使用面積完全相同的元素，則總質量完全保持固定，振幅的時間變化僅在百萬分之一以內。有效能量的時間變化也微乎其微，只有百分之一左右。此外，不論在地轉風平衡或在無輻散平衡的起始條件下，元素面積變化較大的節點系統所得到的總質量的時間變化較大，也只不過是在 0.6% 以內，而且有效能量的時間變也較大，但也只在 6.5% 以內。

和有限差分法的結果互相比較，有限元素法的預報的確較能滿足原方程式的守恒定律，不論元素面積是否完全一樣。因此用有限元素法非常適合局部區域微細網格的預報問題。

在時間積分的三天過程中，本研究每隔 24 小時進行一次高度場的波譜分析，以了解高度場在波數域的分布情形。研究結果顯示，若使用元素面積完全相同的節點系統，則在高度場不會激發短波；若使用元素大小不等的節點系統，則會激發一些雜波，但其能量很小。總之，在積分過程中，非線性不穩定獲得有效的控制。因此利用有限元素法，可以按照所需要的分辨率，定出緩慢變化的元素和節點系統，可以進行局部區域微細網格預報，較不會在粗細網格的交界處激發雜波，此外非線性計算不穩定較易控制。

若以氣象資料的來源而言，用有限元素法來處理氣象問題甚為自然，因為氣象資料是在分佈不規則的測站上觀測得到的，把測站當作節點，就在測站上進行數值天氣分析與預報，可以省去客觀分析的步驟。此外有限元素法適合局部區域微細網格的預報。因此有限元素法在數值天氣分析與預報上的應用會有更多的進展。

## 五、致 謝

本文是在行政院國家科學委員會專題計劃 NSC-69 M-0202-02(01) 支持下完成的。台大大氣科學系盧孟明小姐協助測試基本有限元素法計算機程式及進行部份計算工作，謹表衷心感激。此外中鼎工程顧問公司電腦中心提供電子計算機使用上的方便，本研究才能在有限經費下完成全部計算工作。最後中央研究院物理研究所陳鈞珍小姐協助圖表繪製工作，在此一併致謝。

## 參 考 文 獻

- Arakawa, A., 1966 : Computational design for long-term numerical integration of the equation of fluid motion : Two-dimensional incompressible flow. Part I. *J. Comput. Phys.*, 1, 119-143.
- Arakawa, A., 1972 : Design of the UCLA general circulation model. *Numerical Simulation of Weather and Climate*, Dept. of Meteorology, University of California, Los Angeles, Tech. Rept. 7, 116 pp.
- Asselin, R.A., 1972 : Frequency filter for time integrations. *Mon. Wea. Rev.*, 100, 487-490.
- Bath, K.J., and E.L. Wilson, 1976 : *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 528 pp.
- Collins, R.J., 1973 : Bandwidth reduction by automatic renumbering. *Intern. J. Num. Meth. Engr.*, 6, 345-356.
- Cullen, M.J.P., 1973 : A simple finite element method for meteorological problems. *J. Inst. Maths. Applics.*, 11, 15-31.
- Feilippa, C.A., 1975 : Solution of linear equations with skyline stored symmetric matrix. *Comput. Struct.*, 5, 13-29.
- Fix, G.J., 1975 : Finite element methods for the ocean circulation problems. *SIAM J. Appl. Maths.*, 29, 371-387.
- GARP, 1974 : Modelling for the First GARP Global Experiment. GARP Publications Series No. 14, World Meteorological Organization, Geneva, 261 pp.
- GARP, 1979 : Numerical Methods Used in Atmospheric Models, Vol. II. GARP Publication Series No. 17, World

- Meteorological Organization, Geneva, 499 pp.
- Gibbs, N.E., W.G. Pole and P.K. Stockmyer, 1976 : An algorithm for reducing the bandwidth and profile of a sparse matrix. *SIAM J. Numer. Anal.*, 13, 236-250.
- Grammel **l**vedt, A., 1969 : A survey of finite difference schemes for the primitive equation for a barotropic fluid. *Mon. Wea. Rev.*, 97, 384-404.
- Harrison, E.J. and R.L. Elsberry, 1972 : A method for incorporating nested finite grids in the solution of systems of geophysical equations. *J. Atmos. Sci.*, 29, 1235-1245.
- Hill, G., 1968 : Grid telescoping in numerical weather prediction. *J. Appl. Meteor.*, 7, 29-38.
- Jespersen, D.C., 1974 : Arakawa's method is a finite element method. *J. Comput. Phys.*, 16, 383-390.
- King, I.P., 1970 : An automatic reordering schemes for simultaneous equation derived from network systems. *Intern. J. Num. Meth. Engr.*, 2, 523-533.
- Melosh, R.J., 1965 : Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method. *J. Amer. Inst. Aeron. Astron.*, 1, 1631-1637.
- Mesinger, F. and A. Arakawa, 1976 : Numerical Methods Used in Atmospheric Models. Vol. 1. GARP Publication Series No. 17, World Meteorological Organization, Geneva, 64 pp.
- Phillips, N.A., 1959 : An example of non-linear computational instability. *The Atmosphere and the Sea in Motion*, Rossby Memorial Volume, New York, Rockefeller Institute Press, 501-504.
- Robert, A.J., 1976 : Sensitivity experiments for the development of NWP models. Proceedings of the 11th Stanstead Seminar. Publication in Meteorology, No. 114, McGill University, 96 pp.
- Sasaki, Y.K., 1976 : Variational design of finite difference scheme for initial value problem with an integral constraint. *J. Comput. Phys.*, 21, 270-278.
- Segerlind, L.J., 1976 : Applied Finite Element Analysis. John-Wiley. New York, 422 pp.
- Szabo, B.A. and G.C. Lee, 1969 : Derivation of stiffness matrices for problems in plane elasticity by Galerkin method. *Intern. J. Num. Meth. Engr.*, 1, 301-310.
- Thacker, W.C., 1978 a : Comparison of finite element and finite difference schemes. Part I : One dimensional gravity wave motion. *J. Phys. Oceanogr.*, 8, 676-679.
- Thacker, W.C., 1978 b : Comparison of finite element and finite difference schemes. Part II : Two dimensional gravity wave motion. *J. Phys. Oceanogr.*, 8, 680-689.
- Wang, H.H., J. Halpern, J. Douglas and T. Dupont, 1972 : Numerical Solutions of the one-dimensional primitive equation using Galerkin approximation with localized basis function.

ions. Mon. Wea. Rev., 100,  
738-746

王金慶, 1981 : 線性平衡之有限元素變分佳化分析。大氣科學, 第八期, 24-41, 中華民國氣象學會。

曾忠一, 1977 : 正壓原始方程式計算不穩定之研究。中央研究院物理研究所集刊, 第七卷, 93-97。

曾忠一, 1980 : 用有限元素法求大氣垂直速度。大氣科學, 第七期, 13-20, 中華民國氣象學會。

謝全生, 1980 : 有限元素法之變分客觀分析。私立中國文化學院池學研究所碩士論文。

## BAROTROPIC PRIMITIVE EQUATION MODEL BASED ON THE FINITE ELEMENT METHOD

Chung-Yi Tseng Ling-Hua Pan Yung-An Lee

Department of Atmospheric Sciences National Taiwan University

### Abstract

A barotropic primitive equation model based on the finite element method is developed. The Galerkin approximation is used to transform the barotropic primitive equation into the finite element equation, which in turn is solved by the Gauss elimination. The Galerkin approximation automatically satisfies the quadratic conservative laws possessed by the original partial differential equation and thus achieves a more accurate integration of the primitive barotropic equation. The model uses leapfrog time differencing with the Robert time filter. At each time step the total mass and total available energy are calculated and it is found that they remain constant during the three day integration period. The results indicate that the nonlinear instability has been efficiently suppressed by the Galerkin technique.