

# 原始方程式模式積分方法之探討

簡來成

中央研究院物理研究所

(中華民國七十年三月二日收件)

## 摘要

有限地區原始方程式模式，以 explicit, semi-implicit 及新近發展的交錯積分法預測 24 小時東亞地區之大氣運動。比較其積分程序，可看出基本方程式用 implicit 法處理後，其時間增量可放大，進而節省計算時間。以相同的初始邊界條件，交錯積分法，explicit 法預測的 24 小時天氣型態與 semi-implicit 法所預測的大致相同。

## 一、前言

原始方程式預報模式為探討天氣現象之工具，且以為日常作業之用 (Shuman 和 Hovermale, 1968; Nitta, Yamagishi 和 Okamura, 1980)。雖然原始方程式模式比準地轉模式假設條件減少，但是由於重力波沒有過濾，用以數值天氣預報時，積分的時間增量不能太大，以保持其計算之穩定。

近年來高效率積分方法的發展，在數值天氣預報上佔一重要角色。最常見者為 explicit 法 (Shuman 和 Hovermale, 1968)。Implicit 法為解原始方程式模式放大時間增量的最佳方法。Marchunk (1965) 首先試驗成功應用於天氣預報。預報模式之終至目標為運用於例行預報作業，此法雖能將時間增量放大，但解方程式所需計算機時間較多。McPherson (1971) 以 semi-implicit 法改進之，用以解單層原始方程式模式。英國作業的十層原始方程式，模式也採用 semi-implicit 法 (Burridge, 1975)。

若能設計一種數值方法應用於預報方程式中，其計算過程如 explicit 法簡便，且能放大其積分之時間增量，得到一樣的準確度，那將是一大貢獻。Gadd (1978) 設計 split explicit 法，以十層原始方程式模式試驗，其所用之計算機時間比 semi-implicit 法節省三分之一。

Gaurley (1970) 設計交錯積分法解偏微分方程式，並證明其無條件計算之穩性。每

時間步驟之計算比 semi-implicit 法快三至四倍。我們嘗應用於斜壓準地轉模式 (Chien 和 Wang, 1979)，將時間增量放大至一小時，其結果仍與 explicit 法求得之三位有效數字一樣。因此嘗試將此法引用於原始方程式模式。

為比較 explicit, semi-implicit, 與交錯積分法之效率，以相同的邊界條件與初始條件，用單層原始方程式模式計算 24 小時以後之天氣型態結果三者大致相同。交錯積分法與 semi-implicit 法用  $\Delta t = 30$  分鐘預報 24 小時所用之計算機之時間比為 1 : 1.43，即比 semi-implicit 法節省近三分之一之計算時間。

## 二、基本方程式與數值計算

假設大氣為均勻、非壓縮、無黏性之流體。運動方程式與連續方程式之 "invariant" 形式 (Shuman 和 Stackpole; 1969) 為：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - f v = \rho v - \frac{\partial K}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + f u = -\rho u - \frac{\partial K}{\partial y} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + g H_0 m^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ = -m^2 \left[ \frac{\partial (\phi u)}{\partial x} + \frac{\partial (\phi v)}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

式中  $u, v$  為 scaled 速度分量 (速度除以地圖因數  $m$ )， $\phi$  為重力位與平均量  $gH_0$  之變化量， $\rho$ ， $K$  分別為水平相對渦旋度與動能。

$$\rho = m^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4)$$

$$K = \frac{1}{2} \left[ (mu)^2 + (mv)^2 \right] \quad (5)$$

(1)–(3)式  $u, v, \phi$  三變數, Shuman 和 Hovermale (1968) 將基本微分方程式化為差分方程式, 式中包含水平方向的平均。速度、重力場等物理量在網格點上為已知值。網格點上的平均量與差分分量分別為:

$$\bar{u}_{i,j} = (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) / 2 \quad (6)$$

$$(u_{i,j})_x = \frac{1}{2\Delta x} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \quad (7)$$

以此系統(1)–(3)式改寫成差分方程式 (Shuman 和 Stackpole, 1969)

$$\bar{u}_t^t = \overline{f\bar{v}^{xy} + p\bar{v}^{xy} - \bar{\phi}_x^y - \bar{K}_x^y}^{xy} \quad (8)$$

$$\bar{v}_t^t = \overline{-f\bar{u}^{xy} + p\bar{u}^{xy} - \bar{\phi}_y^x - \bar{K}_y^x}^{xy} \quad (9)$$

$$\bar{\phi}_t^t = \overline{-gH_0 m^2 (u_x^y + v_y^x) - m^2 [( \bar{\phi}_y^x \bar{u}^y )_x + ( \bar{\phi}_x^y \bar{v}^x )_y]}^{xy} \quad (10)$$

式中水平相對渦旋度

$$p = \bar{m}^2 (v_x^y - u_y^x) \quad (11)$$

(8)–(10)式展開差分式, 可由現在時間 ( $t$ ) 及過去時間 ( $t - \Delta t$ ) 的物理量, 計算下一時間 ( $t + \Delta t$ ) 之  $u, v, \phi$ 。這種積分法一般稱之為 explicit 法。Kwizak 和 Robert (1971) 成功了設計 semi-explicit 法, 處理聲波與重力波, 應用波譜正壓模式在北半球原始方程式。在加拿大已應用於預報作業上。

McPherson (1971) 改進上述方法, 應用之於有限地區原始方程式正壓模式。將科氏參數分為平均值與變化值  $f = f_0 + f'$ 。採用 semi-implicit 法, 對支配重力波振盪諸項 (動量方程式中的壓力項、及連續方程式中的輻散項) 加以時間平均。

$\bar{u}^{2t} \equiv [u(t + \Delta t) - u(t - \Delta t)] / 2\Delta t$  對科氏項的線性部份以  $f_0 v$  和  $f_0 u$  處理, 則(1)–(3)式變成:

$$\bar{u}_t^t + (\bar{\phi}_x^y)^{2t} - f_0 \bar{v}^{2t}$$

$$= \overline{v^{xy} (p + f') - \bar{K}_x^y}^{xy} \quad (12)$$

$$\bar{v}_t^t + (\bar{\phi}_y^x)^{2t} + f_0 \bar{u}^{2t} = \overline{-u^{xy} (p + f') + \bar{K}_y^x}^{xy} \quad (13)$$

$$\bar{\phi}_t^t + gH_0 m^2 (\bar{u}_x^y + \bar{v}_y^x) = \overline{-m^2 [( \bar{\phi}_y^x \bar{u}^y )_x + ( \bar{\phi}_x^y \bar{v}^x )_y]}^{xy} \quad (14)$$

(12)–(14)式展開, 可得到將來時間 ( $t + \Delta t$ ) 的  $u, v, \phi$  值, 與現在 ( $t$ ), 過去 ( $t - \Delta t$ ) 值的關係式。

McPherson (1971) 將之化簡得到下列:

$$u^{n+1} = \hat{A} - \frac{\Delta t}{1 + (f_0 \Delta t)^2} \times [(\bar{\phi}_x^y)^{n+1} + f_0 \Delta t (\bar{\phi}_y^x)^{n+1}] \quad (15)$$

$$v^{n+1} = \hat{B} - \frac{\Delta t}{1 + (f_0 \Delta t)^2} \times [(\bar{\phi}_y^x)^{n+1} + f_0 \Delta t (\bar{\phi}_x^y)^{n+1}] \quad (16)$$

$$\phi^{n+1} = \frac{\Delta t^2 \nabla^2 \phi^{n+1}}{2\Delta x^2 [1 + (f_0 \Delta t)^2]^2} = C - gH_0 m^2 \Delta t (\hat{A}_x + \hat{B}_y) \quad (17)$$

上式中

$$\hat{A} = A + f_0 \Delta t B$$

$$\hat{B} = B - f_0 \Delta t A$$

$$A = u^{n-1} - \Delta t (\bar{\phi}_x^y)^{n-1} + f_0 \Delta t v^{n-1}$$

$$+ 2\Delta t [\bar{v}^{xy} (p + f') - \bar{K}_x^y]^n$$

$$B = v^{n-1} - \Delta t (\bar{\phi}_y^x)^{n-1} - f_0 \Delta t u^{n-1}$$

$$- 2\Delta t [\bar{u}^{xy} (p + f') - \bar{K}_y^x]^n$$

$$C = \phi^{n-1} - \Delta t (\bar{\phi}_y^x)^{n-1} + f_0 \Delta t u^{n-1}$$

$$- 2\Delta t [\bar{u}^{xy} (p + f') + \bar{K}_y^x]^n$$

(17)式是 Helmholtz 型的微分方程式, 假設一適當的邊界條件, 我們可用緩和法 (relaxation) 求得網格點上  $\phi^{n+1}$  之值, 然後由(15)及(16)式可計算新時間階段之速度值。(14)–(17)式組成所謂之

semi-implicit 解法。

Explicit 法(8)–(11)式與 semi-implicit (15)–(17)式，方程式中可看到太多的平均值。太多的平均值可能使預報方程式失去地轉平衡。Gerrity 和 Mcpherson (1971) 在科氏力項中用不平均的速度分量，保持相當好的 geostrophic balance。Campana (1974) 將此觀念應用於 semi-implicit 模式中。我們嘗試用 Shuman (1962) 的 Semi-momentum 差分法，將基本方程式(1)–(3)寫成：

$$\bar{u}_{t,t} = (\bar{f}^{xy} + \bar{\rho}^{xy}) \bar{v}^{xy} - \bar{\phi}_x^{xy} - \bar{K}_x^{xy} \dots\dots(18)$$

$$\bar{v}_{t,t} = -(\bar{f}^{xy} + \bar{\rho}^{xy}) \bar{u}^{xy} - \bar{\phi}_y^{xy} - \bar{K}_y^{xy} \dots(19)$$

$$\bar{\phi}_{t,t} = -gH_0 m^2 (\bar{u}_x^{xy} + \bar{v}_y^{xy}) - m^2 [(\bar{\phi}^y \bar{u}^x)_x + (\bar{\phi}^x \bar{v}^y)_y] \dots\dots(20)$$

上式中

$$\bar{p}_{t,t} = \frac{1}{4} (p_{i+1,j} + p_{i-1,j} + p_{i,j+1} + p_{i,j-1})$$

$$p_{i,j} = \bar{m}_{t,t} (\bar{v}_x^y - \bar{u}_y^x)_{i,j}$$

$$= \bar{m}_{t,t} \frac{1}{4D} [(v_{i+1,j+1} + v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j+1} - v_{i-1,j+1}) - (u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1})]$$

由上面看來，若計算 (i+j) 為奇數點之新時間階段值， $u_{t,t}^{i,j}$ ， $v_{t,t}^{i,j}$ ，及  $\phi_{t,t}^{i,j}$  (18)–(20)式右端諸項可

由 (i+j) 為偶數諸點計算之。因此由  $t = n\Delta t$  積分至  $t = (n+1)\Delta t$  時，若將計算過程分別兩步驟，首先以 explicit 法計算 (i+j) 為奇數點諸點之新值。然後再計算 (i+j) 為偶數點之物理量，計算偶數點時，雖用 explicit 法，但計算所用的 (i+j) 為奇數點諸物理量已為 (n+1)  $\Delta t$  之值，而(18)–(20)式右端諸項全為 (n+1)  $\Delta t$  之新值，此即 implicit 法。但此處 implicit 法解(18)–(20)式並不著解代數聯立方程式。這種交錯積分法為 Gouley (1970) 所設計，在數學上已證實其穩定性，實際的應用已擴展至流體力學上。我們初步應用到多層準地轉模式 (Chien 和 wang, 1979)，時間增量擴大至60分鐘，預報結果與 explicit 法  $\Delta t = 15$  分鐘的天氣型態一致，計算機印出來三位有效數字全完一樣，此法嘗試應用於原始方程式模式中。

### 三、數值實驗

本文探討上節所提諸方法，解預報方程式，以比較其準確度與所需之計算時間。初始條件為1975年6月10日已分析過之東亞地區之天氣資料 (Chen 和 Tsay, 1977)，500 mb 之高度場稍經過修正以滿足平衡方程式之橢圓性 (Shuman, 1957) (圖一)。

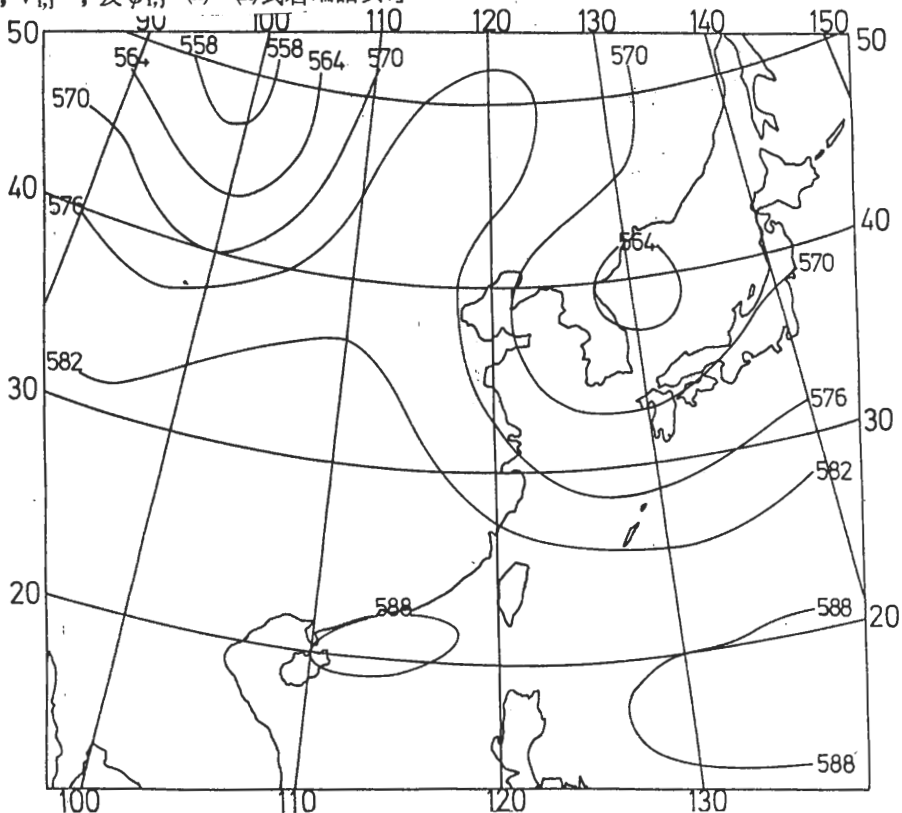


圖1 65年6月10日0000Z初值化後500mb高度場。

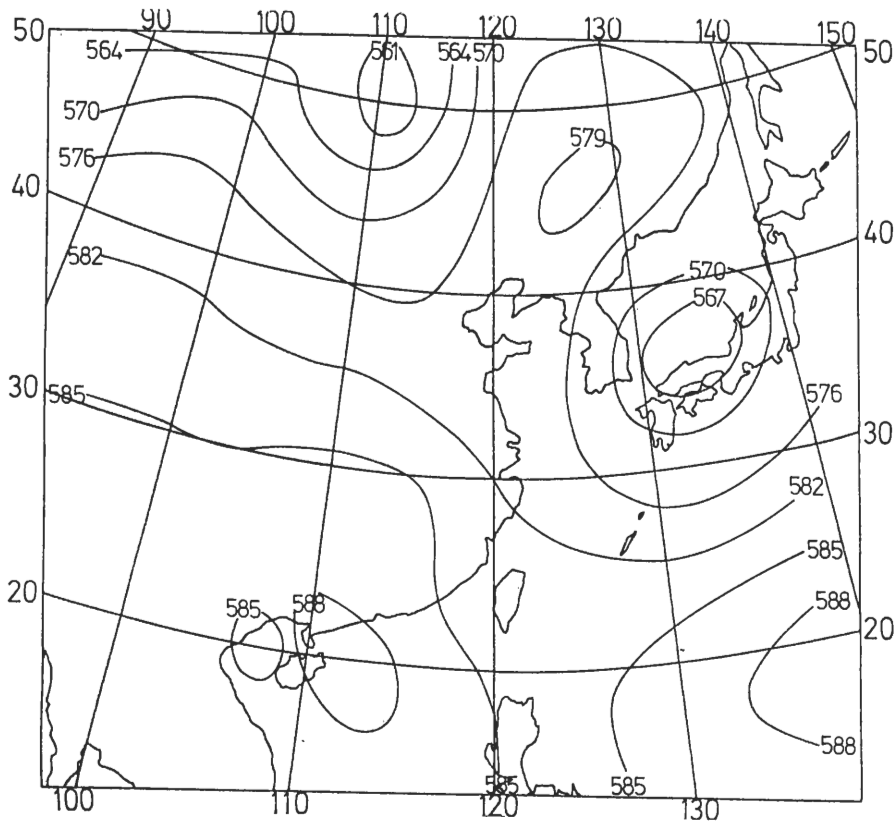


圖2 65年6月11日0000 Z之500 mb高度場。

(1)–(3)式在數學上為初始—邊界條件值問題。除初始條件外，尚需邊界條件。有限地區的數值模擬研究，早期用固定值邊界，即積分過程中，將邊界網格點上之物理量不隨時間而變 (McPherson, 1970)。此法發現靠近邊界的地方不太理想。為了減少短波擾動，Perkey 和 Kreitzberg (1976) 設計多孔海棉阻尼邊界條件，其邊界條件隨計算場內的新值而更新。u 在邊界上之值，由下式求之

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \alpha \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j}^n \Delta t$$

式中  $\alpha$  為權重係數 (weighting coefficient)，在本文內  $\alpha = 0.5$ 。v 及  $\phi$  邊界上之值用同法求之。

圖一 是 6 月 10 日 500mb 0000 Z 的天氣圖。日本海上空有一低氣壓中心，槽線向西南延伸，另在蒙古高原有一低氣壓中心，槽線亦向西南延伸。南海一帶有一反氣旋中心，24 小時後日本海之低氣壓略為填塞。槽線由此中心向西南延伸至台灣東部，24 小時內向東移動約 200 公里。脊線自庫頁島一帶西南延伸，蒙古附近之低氣壓中心略為填塞

。脊線與槽線 24 小時後向東南移動約 200 公里 (圖二)。

本文以原始方程式探討此天氣系統之運動。以初始資料代入原始方程式中，分別以 explicit, semi-implicit 與交錯積分法，作 24 小時之積分，以比較其容許積分時間增量及其計算結果之準確性。

所分析的資料，網格距離  $d = 240$  公里。用 explicit 分法  $\Delta t = 6$  分鐘合乎計算穩定條件。24 小時積分後之計算高度場如圖三。

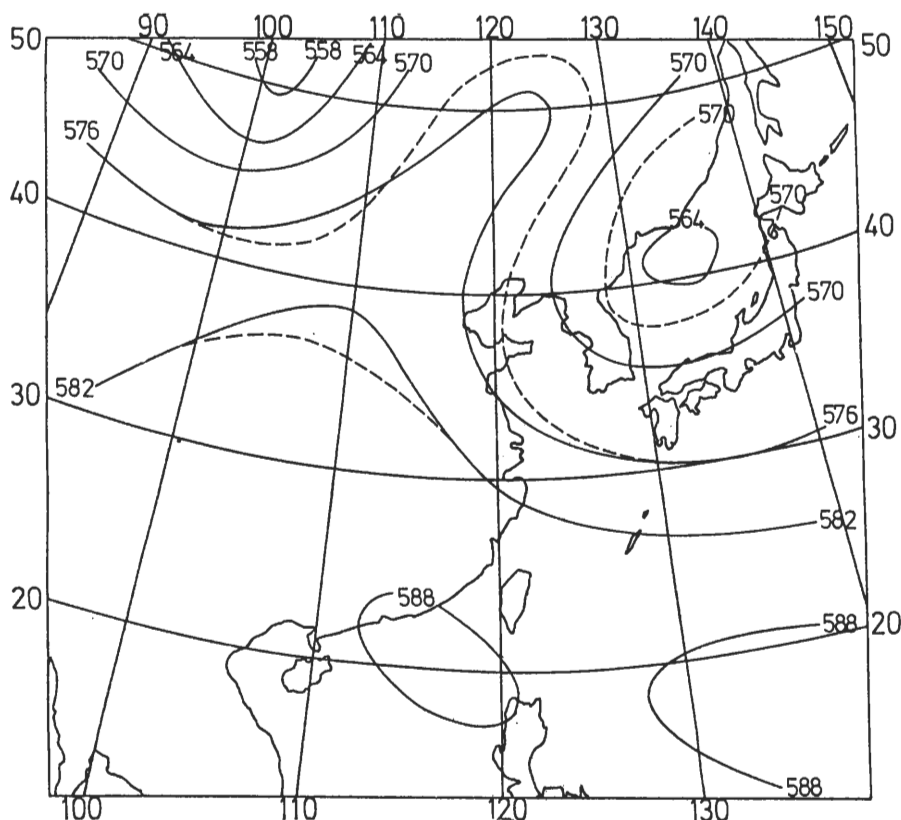


圖3 65年6月11日0000 Z之500mb預報高度場實線explicit法；虛線semi-implicit法。

實線所示。在日本海的低氣壓向東移動但比實際緩慢，中心強度較實際為低，槽線由低氣壓中心向西南延伸至東海，移動速度較實際為慢。蒙古低氣壓略為填塞，低氣壓中心與槽線皆往東移動。脊線由塞北向華北延伸，移動較實際為慢。整個天氣型態除移動速度較慢與低氣壓中心較深外，與實際天氣相似。

於數值實驗使用交錯積分法時首先用 $\Delta t = 6$ 分鐘，24小時候的天氣型態與explicit法所求者，三位有效數值相同，繪製天氣圖，看不出差異。時間增量放大至30分鐘結果仍相同。用交錯法積分時，時間增量能放大，乃得力於每計算過程中加以implicit法處理。

為了比較，用相同的原始條件與邊界條件以semi-implicit以30分鐘的時間增量計算，24小時後天氣型態大致與前二方法所預測的相同，但脊線移動比較快，圖三虛線部份更接近實際天氣情況(圖二)。

Semi-implicit之計算除了較多的平均程序外，尚需解 Helmholtz 方程式，因此所需計算

時間較多。以本文所用的正壓原始方程式模式預報24小時，用CDC CYBER 74-18， $\Delta t = 30$ 分鐘，Semi-implicit法所需計算時間為34.81秒，而交錯積分法只需24.34秒。

#### 四、結 論

Explicit Semi-implicit與新發展之交錯積分法應用於有限地區單層原始方程式模式。Explicit法直接運用過去與現在時間的物理量計算將來的預報值，雖簡便，但必須考慮及計算的穩定度，時間增量不能太大。Semi-implicit法能克服此困難，但必須解Helmholtz方程式。交錯積分法將積分之時間增量擴大至30分鐘，所得之結果幾乎與explicit法一致。Semi-implicit法24小時用 $\Delta t = 30$ 分鐘之天氣型態大致與前二者一樣，但脊線之運動更接近實際天氣情況。

由本文之探討可見交錯法與Semi-implicit法在時間增量大的情況下準確性可肯定。交錯法之計算時間比semi-implicit法減少三分之一。

因此，此法值得推廣應用於多層原始方程式模式。

有限地區之數值預報，邊界條件之使用，足以在右預報成果。因此設計切合實際情況的邊界條件乃是有限地區數值預報之重要課題。本文所用之邊界條件隨時間，而及時更新，但較理想之邊界條件仍待設計。

縮短網格點距離，可減少 truncation 誤差。本文採用 Shuman 和 Hovermale (1968) 的二階差分。Campana (1979) 設計的差分公式，將 NMC 六層原始方程式模式用 semi-implicit 法做 24 小時之預報。發現用四階差分法以粗網格做預報的結果與二階差分法細網格相似。四階差分公式比二階複雜，前者比後者多需 10% 之計算時間。在提高預報準確度的立場來看，值得嘗試使用高階的差分法。

### 參 考 文 獻

- Burridge, D.M. (1975). A split semi-implicit reformulation of the Bushby-Timpson 10-level model, Quart. J. R. Met. Soc., Vol. 101, pp. 777-792.
- Campana, K. (1974). Status report on a semi-implicit version of the Shuman-Hovermale model, NOAA Tech. Memo. NWS NMC-54, 22pp.
- Campana, K. A. (1979). Higher order finite-difference experiments with a semi-implicit model at the National Meteorological Center, Month. Weath. Rev., Vol. 107, pp. 363-376.
- Chen, T. J. G. and C. Y. Tsay (1977). A detailed analysis of a case of Mei-Yu system in the vicinity of Taiwan, Tech. Rept. No. Mei-Yu-001, Dept. Atmo. Sci., National Taiwan University.
- Chien, L. C. and C. T. Wang (1979). Hopscotch integration scheme for numerical weather prediction in Mei-Yu season, Proc. Natl. Sci. Coun. ROC. Vol. 3, pp. 356-363.
- Gadd, A. J. (1978). A split explicit integration scheme for numerical weather prediction, Quart. J. R. Met. Soc., Vol. 104, pp. 569-582.
- Gerrity, J. P. Jr. and R. D. McPherson (1971). On an efficient scheme for the numerical integration of a primitive equation barotropic model, J. App. Met., Vol. 10, pp. 353-363.
- Gourlay, A. R. (1970). Hopscotch: A Fast Second-order Partial Differential Equation Solver, Journ. Inst. Math. Applics., 6, 375-390.
- Kwizak, M. and Robert, A. J. (1971). A Semi-implicit Scheme for Grid Point Atmospheric Model of the Primitive Equations, Mon. Wea. Rev. 99, 32-36.
- Marchuk, G. I. (1966). A new approach to numerical solution of "differential equations of atmospheric processes, WMO, Tech. Note, No. 66. pp. 286-294.
- McPherson, R. D. (1971). Note on the semi-implicit integration of a fine-mesh limited-area prediction model on an offset grid, Mon. Wea. Rev., Vol. 99, pp. 242-246.
- Nitta, T., Yamagishi, Y. and Okamura, Y. (1980). Operational performance of a regional numerical weather prediction model, J. Met. Soc. Japan, Vol. 57, pp. 308-330.
- Perkey, D. J. and C. W. Kreitzberg (1976). A time-dependent lateral boundary scheme for limited-area primitive equation models, Month. Weath. Rev., Vol. 105, pp. 744-755.
- Shuman, F. G. (1957). Numerical methods in weather prediction, Month. Weath. Rev., Vol. 85, pp. 329-332, pp. 357-361.
- Shuman, F. G. (1962). Numerical experiments with the primitive equations, Proc. Inter. Symp. Numerical Weather Prediction, Tokyo, November 7-13, 1960, Japan Meteorological Agency, Tokyo, pp. 85-117.
- Shuman, F. G. and J. B. Hovermale (1968). An operational six-layer primitive equation model, J. Appl. Met., Vol. 7, pp. 525-547.
- Shuman, F. G. and Stackpole, J. D. (1969). The currently operational NMC model, and results of a recent simple numerical experiment, Proc. WNO/IUGG Symp. Numerical Prediction, Tokyo, November 26-December 4, 1968, Japan Meteor. Agency. Tokyo. pp. II-85-II-98.

ON THE INTEGRATION SCHEMES FOR ONE-LEVEL  
PRIMITIVE EQUATION MODEL

Lai-Chen Chien

Institute of Physics, Academia Sinica

ABSTRACT

A primitive-equation limited area model has been integrated using explicit, semi-implicit and newly developed time integration technique. Comparisons between the integration schemes manifest that the increased time step and the reduction in computation time are due to the implicit treatment of the terms governing gravity waves in the difference equations. Predictions prepared by the newly developed method, and forecasts produced by explicit and semi-implicit method show only minor differences in 24-hrs forecast over the East Asia area.