

WRF 模式垂直內插方法之研究

魏士偉* 洪景山

中央氣象局氣象資訊中心

(中華民國一〇四年五月一日收稿；中華民國一〇四年八月十四日定稿)

摘 要

本研究所指初始化泛指區域模式在產製初始場過程中的種種處理程序，包括了水平內插、垂直內插、變數轉換以及模式地表氣壓的重建等，隨著不同的資料同化策略，初始化過程對模式預報結果有不同層次的影響。分析結果顯示，WRF (Weather Research and Forecasting) 模式自全球模式降尺度進行初始化後便產生顯著的誤差。本研究旨在分析 WRF 模式垂直內插過程中誤差形成的原因，並且嘗試修改垂直內插方法以降低初始化過程導致的誤差，並進一步改善 WRF 模式的預報。

在理想化實驗與使用實際探空觀測的實驗中，若模式分層與欲進行垂直內插的等壓層距離越近，內插誤差越小；使用較高次方的內插方法也能降低誤差，而三次仿樣內插法則有著最小的內插誤差。

在實際個案測試中，由於 WRF 模式是根據地表與模式層頂的氣壓來計算模式分層的氣壓和高度，每個網格點上的模式分層與等壓層的距離無法固定，所以我們以增加垂直解析度的方式來減少模式分層與等壓層的距離，並且使用不同的方法進行內插。如同理想化實驗的結果，增加模式分層數量有助於降低初始場的誤差，以及後續預報的方均根誤差。另外，使用較高次方的內插方法可顯著降低初始場和模式預報的方均根誤差，其中以三次仿樣內插法最為明顯。

本研究結果顯示導入三次仿樣內插法能有效降低 WRF 模式垂直內插過程的誤差，此一方案已新增於 WRF V3.6 以後之版本，以提供 WRF 模式使用者更佳的垂直內插方法。

關鍵字：初始化、垂直內插、三次仿樣內插法

*通訊作者：魏士偉 E-mail：weiwilliam1987@gmail.com

一、前言

Weather Research and Forecasting (WRF)模式是現在被廣泛使用在研究及作業領域的有限區域模式，這種區域模式一般需要全球模式資料作為其初始場以及邊界條件，但是全球模式資料的網格設定以及垂直分層與區域模式通常差異甚大，需經過地形資料與地面氣壓的重建、將全球模式之變數轉換為區域模式的變數，以及將位於等壓座標的全球模式資料垂直內插至區域模式的垂直座標系統，本研究將以上處理程序定義為模式的初始化過程。經過初始化過程所產生的初始場與邊界條件，在數值預報作業或學術研究中，隨著不同的資料同化策略，對模式結果有不同層次的影響。例如，不考慮資料同化時，初始化產物即

為模式積分的初始場與邊界條件；冷啟動(Cold Start)中則做為資料同化的初始猜測場與模式預報的邊界條件；循環策略(Cycling)下僅提供了模式預報的邊界條件。因此一個良好的初始化過程，對於區域模式的預報是至關重要的。

圖 1 為 WRF 模式將美國國家環境預報中心(National Centers of Environmental Prediction, NCEP)的全球模式資料初始化後所得之模式初始場誤差的垂直分布，在高層約 100 百帕附近即產生明顯的誤差。這現象引起了我們的興趣，我們想了解此誤差究竟來自初始化過程的哪一個環節以及其形成的原因。詳加推斷前述定義之初始化過程，誤差可能來自於變數變換，Wee et al. (2012)指出 WRF 模式在初始化過程中將全球模式資料

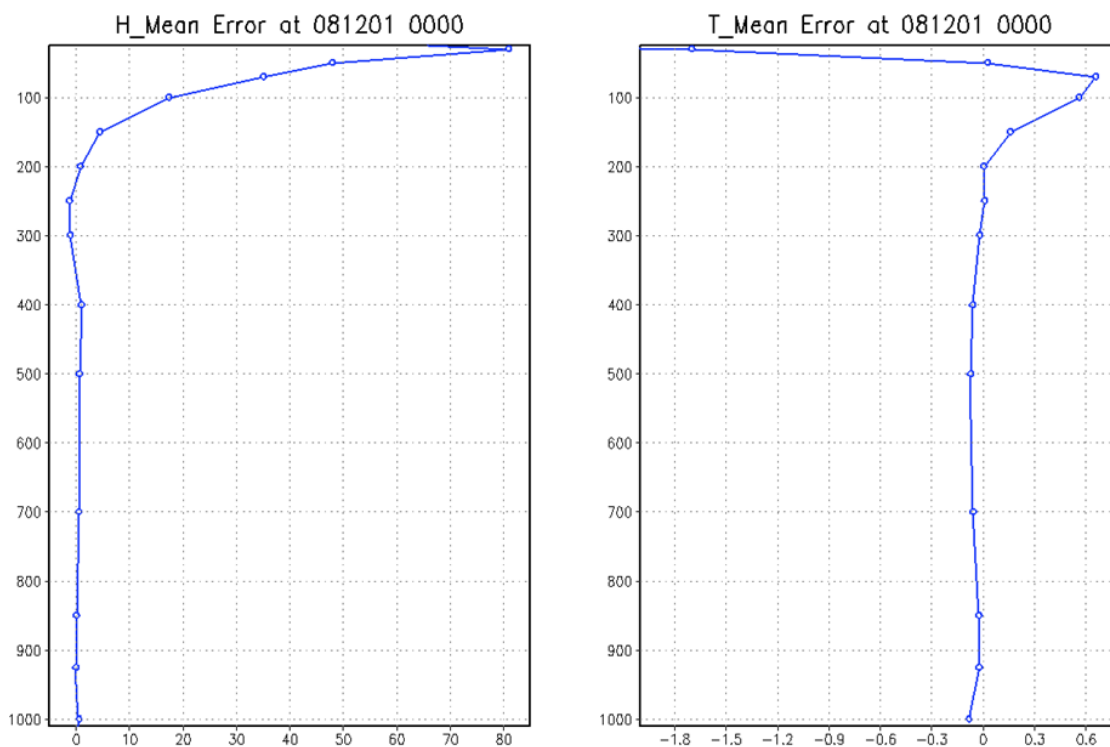


圖 1 自 NCEP 全球模式分析場初始化成 WRF 模式初始場後的平均偏差垂直分布，(a)高度場(m)、(b)溫度場(°C)。模式初始時間為 2008 年 12 月 1 日 0000 UTC，校驗的真值為 NCEP 全球模式分析場。

的溫度場先轉為位溫後進行垂直內插，再換算回溫度提供後續流程計算，在溫度與位溫轉換的過程便會引入些許誤差。將全球模式資料轉換到區域模式網格上時所用的水平內插，也可能導致誤差的形成。此外，因區域模式網格間距較小、解析度較高，有著較為細緻的地形資料，初始化時必須將全球模式的地面氣壓根據 WRF 模式的地形資料重新計算以符合 WRF 模式地形，此一過程涉及變數的重新計算也會產生誤差。

除了前述可能的誤差來源，模式的垂直分層與垂直內插的方法也都會對模式的初始場及預報產生影響。如 Zhang and Wang (2003)與 Kimbell and Dougherty (2006)的研究指出，增加垂直解析度能夠讓模式對於颶風的強度及結構有更好的掌握能力。Aligo et al. (2009)針對 WRF 模式進行不同垂直分層分佈對模式定量降水預報(Quantity Precipitation Forecast, QPF)的影響，發現增加垂直解析度不一定能增加降水預報的能力，但是增加邊界層內的解析度對於 QPF 有正面幫助。另外，Shen et al. (1986)提出模式初始化時的垂直內插方法，必須能夠保持原始資料的垂直分布特性與氣象參數間的平衡，否則誤差將透過積分過程而對預報造成相當大的影響。還有 Gaertner and Castro (1995)對於質量場變數的垂直內插方法做了一系列測試，結果顯示三次仿樣內插法(Cubic-Spline Interpolation)相較於線性內插有更好的表現。但是尚未有文獻深入探討 WRF 模式的初始化過程中，垂直分層分佈與垂直內插方法對於初始場誤差的影響。

本研究旨在探討 WRF 模式垂直內插過程所引入的誤差特性，並進一步尋求降低誤差的改善方法。在第二部分我們針對 WRF 模式的初始化過程進行分析，接著第三部分設計理想化實驗進

行分析與探討影響誤差的因素。第四部分則根據第三部分的實驗結果，針對實際個案設計新的垂直分層與評估不同垂直內插方法對 WRF 模式初始化及其對模式預報的影響。最後一部分總結本研究的成果。

二、WRF 模式之初始化過程

圖 2 為 WRF 模式中將全球模式資料初始化為模式初始場的流程，如圖所示，WRF 前處理系統(WRF Pre-process System, WPS)中的 ungrib 模組將 GRIB 2 格式的 global 模式等壓層資料解碼後，透過 metgrid 模組水平內插至 WRF 模式的水平網格，接著使用 real 模組進一步將等壓層的 global 模式資料進行初始化，得到 WRF 模式的初始場與邊界條件後即可進行模式的積分運算。本研究即著重探討 real 模組中垂直內插過程可能導致的誤差分析。

在 real 的資料處理過程中，許多不隨時間變化的變數(例如地形和土地利用等)並不會被 real 所改變，但是分布在垂直方向上的參數，如水平風場(U、V)、溫度場(T)、混合比(Q)、高度場(H)及氣壓(P)都會經由 real，將 global 模式等壓層的資料垂直內插到 WRF 模式層上，real 的詳細流程如圖 3 所示。在進行垂直內插時需要兩個座標，其中一個是 global 模式的原始等壓層座標，另外一個則是 WRF 模式分層的目標座標。為了得到這兩個座標，real 先透過 global 模式等壓層的高度、地形高度與海平面氣壓以及 WRF 模式的地形高度計算得到 WRF 模式的地面氣壓(P_{sfc})，並用 global 模式等壓層上的相對溼度計算得到混合比換算等壓面上的水氣壓，進而算出 global 模式每個等壓層的乾空氣氣壓(P_d)與乾空氣柱質量($\mu_d = P_{sfc} - P_{top}$ - 累積水氣壓)。接下來，透過 μ_d 與給定的 WRF

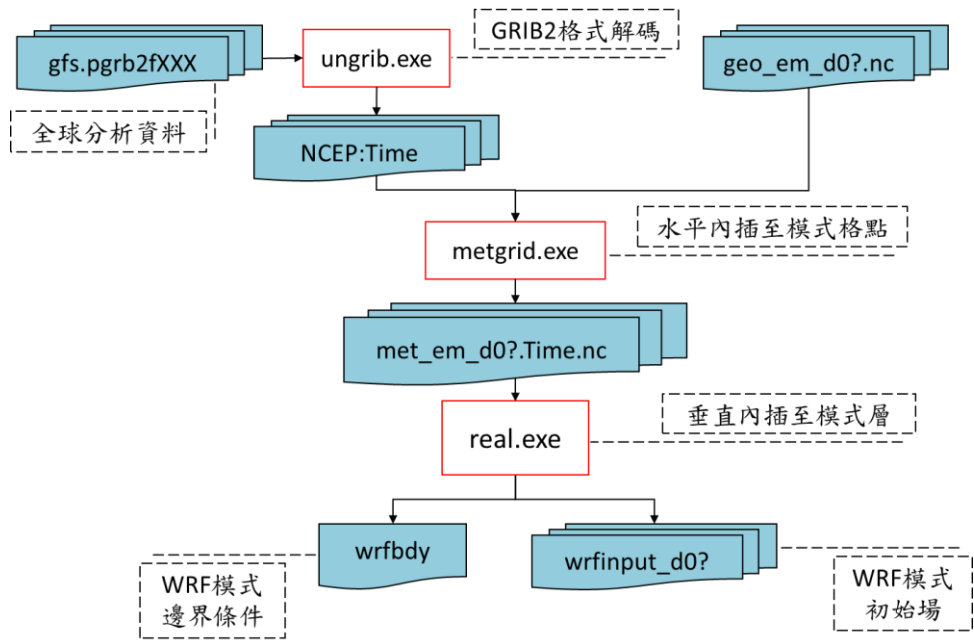


圖 2 全球模式資料轉換成 WRF 模式初始場流程圖，各模組之詳細內容可參考 WRF 模式提供的使用者說明。
(http://www2.mmm.ucar.edu/wrf/users/docs/user_guide_V3/contents.html)

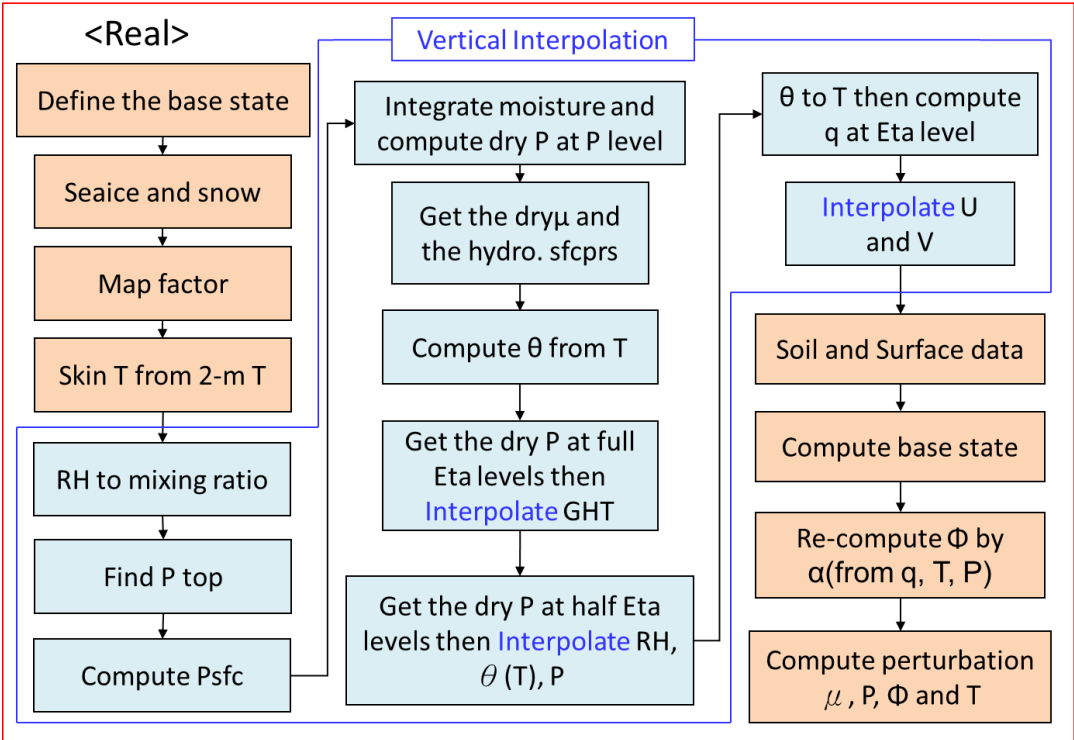


圖 3 WRF 模式初始化模組 real 的處理流程，其中藍框部分為垂直內插相關的部分。

模式 η ($\eta = (P_d - P_{top})/\mu_d$) 分層，可以得到 WRF 模式分層上的乾空氣氣壓 $P_{d|\eta}$ ($P_{d|\eta} = \mu_d \times \eta + P_{top}$)。至此，real 擁有了原始全球模式資料的所處的乾空氣氣壓 (P_d) 與 WRF 模式分層的乾空氣氣壓 ($P_{d|\eta}$)，接著便可使用 P_d 和 $P_{d|\eta}$ 進行各項參數的垂直內插。由於 WRF 模式在垂直方向上使用交錯網格的設定，因此重力位高度場 (H) 內插至 WRF 全模式層 (圖 4 實線)，溫度場 (T) 或位溫場 (θ)、水氣混合比 (Q) 以及風場 (U 與 V) 則是內插至 WRF 半模式層 (圖 4 虛線)。最後 real 會減去溫度 (T)、氣壓 (P) 以及高度 (H) 的基本場得到擾動場。

從 real 的流程簡述中，我們可以了解，透過

垂直內插將全球模式位於等壓層的資料轉換至 WRF 模式的 η 分層，可能是造成 WRF 模式初始場與全球分析資料有著明顯差異的關鍵因素。在此，我們將先透過理想化實驗探討初始化模組 real 的垂直內插方法所造成的誤差，再進一步設計改善 WRF 初始化誤差的垂直內插方法。

三、垂直內插誤差探討

(一) 實驗設計

為了瞭解 real 模組進行垂直內插時導致的誤差特性，我們透過擬合實際探空觀測之溫度和高

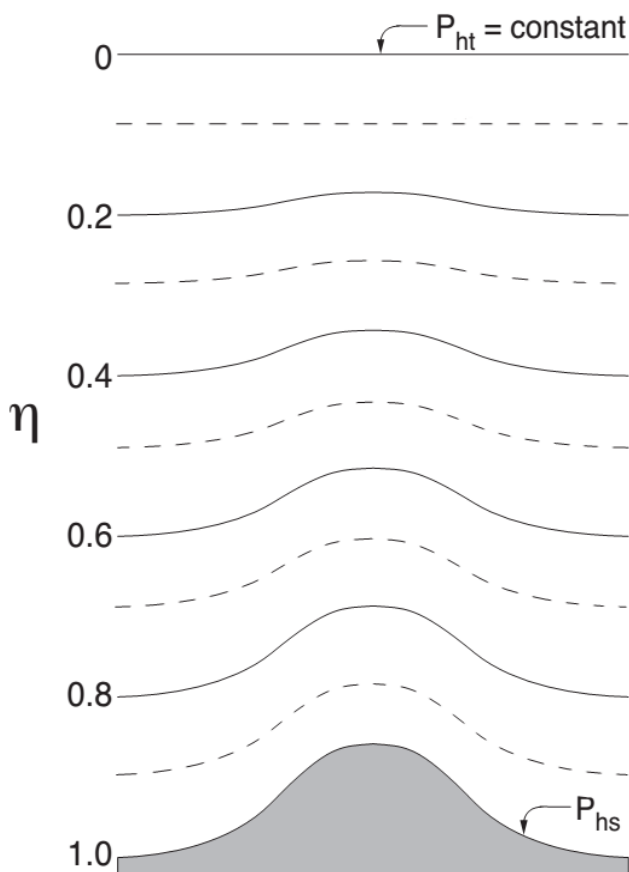


圖 4 WRF 模式 η 垂直分層示意圖，實線為全模式層，虛線為半模式層。 P_{hs} 為 WRF 模式地面氣壓， P_{ht} 為模式層頂氣壓。(取自 Technical Description of ARW, http://www2.mmm.ucar.edu/wrf/users/docs/arw_v3.pdf)

度場作為真值，溫度之擬合剖線方程式為：

$$y = \frac{[a + c \ln x + e(\ln x)^2 + g(\ln x)^3 + i(\ln x)^4]}{[1 + b \ln x + d(\ln x)^2 + f(\ln x)^3 + h(\ln x)^4]} \quad [1]$$

其中 y 為溫度， x 為氣壓取對數 ($\ln(P)$)， $a = -5.523$ 、 $b = -1.489$ 、 $c = -59.460$ 、 $d = 0.706$ 、 $e = 122.467$ 、 $f = -0.107$ 、 $g = -80.007$ 、 $h = 0.005$ 、 $i = 17.336$ 。

而標準大氣之高度擬合剖線方程式則為：

$$y = a + bx^2 + cx^4 + dx^6 + ex^8 + fx^{10} + gx^{12} + hx^{14} + ix^{16} + jx^{18} + kx^{20} \quad [2]$$

其中 y 為高度， x 同樣為氣壓取對數 ($\ln(P)$)， $a = 42691.087$ 、 $b = -3353.758$ 、 $c = 351.692$ 、 $d = -33.672$ 、 $e = 2.175$ 、 $f = -0.089$ 、 $g = 0.002$ 、 $h = -3.171 \times 10^{-5}$ 、 $i = 2.107 \times 10^{-7}$ 、 $j = 4.801 \times 10^{-11}$ 、 $k = -5.706 \times 10^{-12}$ 。

[1][2]將作為真實場，給定 x 即可求得解析解 y 。兩式中的 x 之所以選擇氣壓取對數，是由於在 real 中的垂直內插是在 $\ln(P)$ 上進行。因此，我們根據 NCEP 全球模式分析場之 26 層¹等壓層(x_{ori})可求得每一層相應的 y_{ori} ，接著使用 y_{ori} (x_{ori})內插至模式分層(x_{new})求得其內插值(y_{new} (x_{new}))，以及模式分層之真值(y_t (x_{new}))， y_{new} (x_{new})與 y_t (x_{new})的差值即為內插導致的誤差。

本研究中使用四種垂直內插方法，分別是屬於拉格朗日多項式內插法的線性內插（代號為 L ）、二次式內插（代號為 Q ）以及三次式內插（代號為 3 ），還有三次仿樣內插法（代號為 S ），詳細

的垂直內插方法說明請參考附錄一。另設計三種不同的垂直分層分佈，其中 mid25 代表的是 x_{new} 位在兩層 x_{ori} 的中間，「350」則是在兩層 x_{ori} 之間三分之一與三分之二的位子上，「1050」為 x_{new} 分佈在兩層 x_{ori} 間十分之一與十分之九的地方，圖 5 為這三種模式分層 x_{new} 與等壓層 x_{ori} 之分布關係示意圖。本研究使用上述四種垂直內插方法搭配三種垂直分層，分析探討影響垂直內插誤差

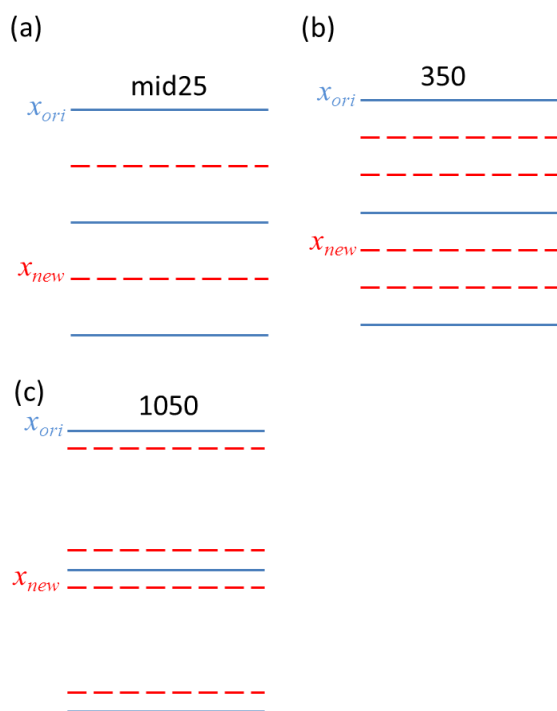


圖 5. 理想化實驗模式分層示意圖，藍色實線 x_{ori} 為原始資料分層，紅色虛線 x_{new} 為內插的目標分層。
 (a) mid25 代表 x_{new} 位在兩層 x_{ori} 中間，共 25 層。
 (b) 「350」代表兩層 x_{new} 分別處在兩層 x_{ori} 之間三分之一與三分之二的位置上，共 50 層。
 (c) 「1050」代表兩層 x_{new} 分別處在兩層 x_{ori} 之間十分之一與十分之九的位置上，共 50 層。

¹ NCEP 全球模式 26 層等壓層分別為 1000 hPa、975 hPa、950 hPa、925 hPa、900 hPa、850 hPa、800 hPa、750 hPa、700 hPa、650 hPa、600 hPa、550 hPa、500 hPa、450 hPa、400 hPa、350 hPa、300 hPa、250 hPa、200 hPa、150 hPa、100 hPa、70 hPa、50 hPa、30 hPa、20 hPa、10 hPa。

的因素，其詳細實驗設計如表 1 所示。另外，Wee et al. (2012)指出 WRF 在初始化過程中將分析資料的溫度場轉為位溫後進行內插，再轉回溫度進行計算，此一過程亦會產生誤差，為了減少誤差來源，我們直接使用溫度場進行垂直內插的測試。

(二) 結果分析

首先我們透過 Lmid25、L350、L1050 這三組使用線性內插的實驗分析垂直層數造成的差異。圖 6 顯示了三組實驗進行垂直內插過後的誤差分布特性，高度場在 $\ln(P)$ 小於 4.5 有正偏差，大於 4.5 則是負偏差（圖 6a）。而溫度場則是在 $\ln(P)$ 小於 4 的區域有負偏差， $\ln(P)$ 在 4~5.5 之間則是有明顯的正偏差， $\ln(P)$ 大於 5.5 略有負偏差存在（圖 6b）。一般來說，在斜率為定值的線段上進行線性內插，能得到無偏差的內插結果，而線性內插在斜率變化為正的線段，會得到高估的結果，反之在斜率變化為負的線段進行線性內插，則會得到低估的結果。雖然高度場隨 $\ln(P)$ 的變化（圖 7a）接近線性，但其垂直梯度（以下簡稱為斜率）隨高度的變化並非定值，如圖 7b 所示圖 7，高度場

在 $\ln(P)$ 小於 4.5 的區域斜率隨高度的變化為正，根據前述推論，在此段曲線上取任意兩點進行線性內插，會得到高估的內插結果。而 $\ln(P)$ 大於 4.5 時，高度場的斜率隨高度的變化則為負，所以在此區段任意取兩點進行線性內插，內插結果將會低估。此一情形正好符合圖 6a 高度場的垂直內插誤差分布。圖 8a 顯示溫度場隨 $\ln(P)$ 的變化，可以發現溫度在 $\ln(P)$ 約等於 4.5 時，溫度達到最低點，這在大氣的垂直分層裡是對流層頂的特徵。對應圖 8b 溫度斜率隨高度的變化，在斜率變化為負的區段，如 $\ln(P)$ 小於 4 及大於 5.5 這兩段區間，進行線性內插會得到低估的內插值，而 $\ln(P)$ 在 4~5.5 之間的區域，溫度斜率隨高度的變化為正值，進行線性內插將會得到高估的內插值，此處推論亦符合圖 6b 中溫度內插的誤差分布。由此可知，當變數隨高度二次微分的值越大時，線性內插所導致的誤差也會越大。另外，圖 6b 中 $\ln(P)$ 大於 5.5 的低估情形較輕微，這主要是因為等壓層的厚度在此區段較薄，因此垂直內插產生的誤差也較小。

表 1 Xmid25 代表內插位置在兩層等壓層(P_p)中間，共 25 層。X350 代表內插位置分別位在兩層等壓層(P_p)之間三分之一與三分之二的位置上，共 50 層。X1050 代表內插位置分別位在兩層等壓層(P_p)之間十分之一與十分之九的位置上，共 50 層。

實驗名稱	垂直層數	內插位置	附註
Xmid25	25	$\frac{1}{2}\Delta\ln(P_p)$	X：表垂直內插方法，L 為線性內插，Q 為二次式內插，3 為三次式內插，S 為三次仿樣內插法。
X350	50	$\frac{1}{3}\Delta\ln(P_p), \frac{2}{3}\Delta\ln(P_p)$	
X1050	50	$\frac{1}{10}\Delta\ln(P_p), \frac{9}{10}\Delta\ln(P_p)$	

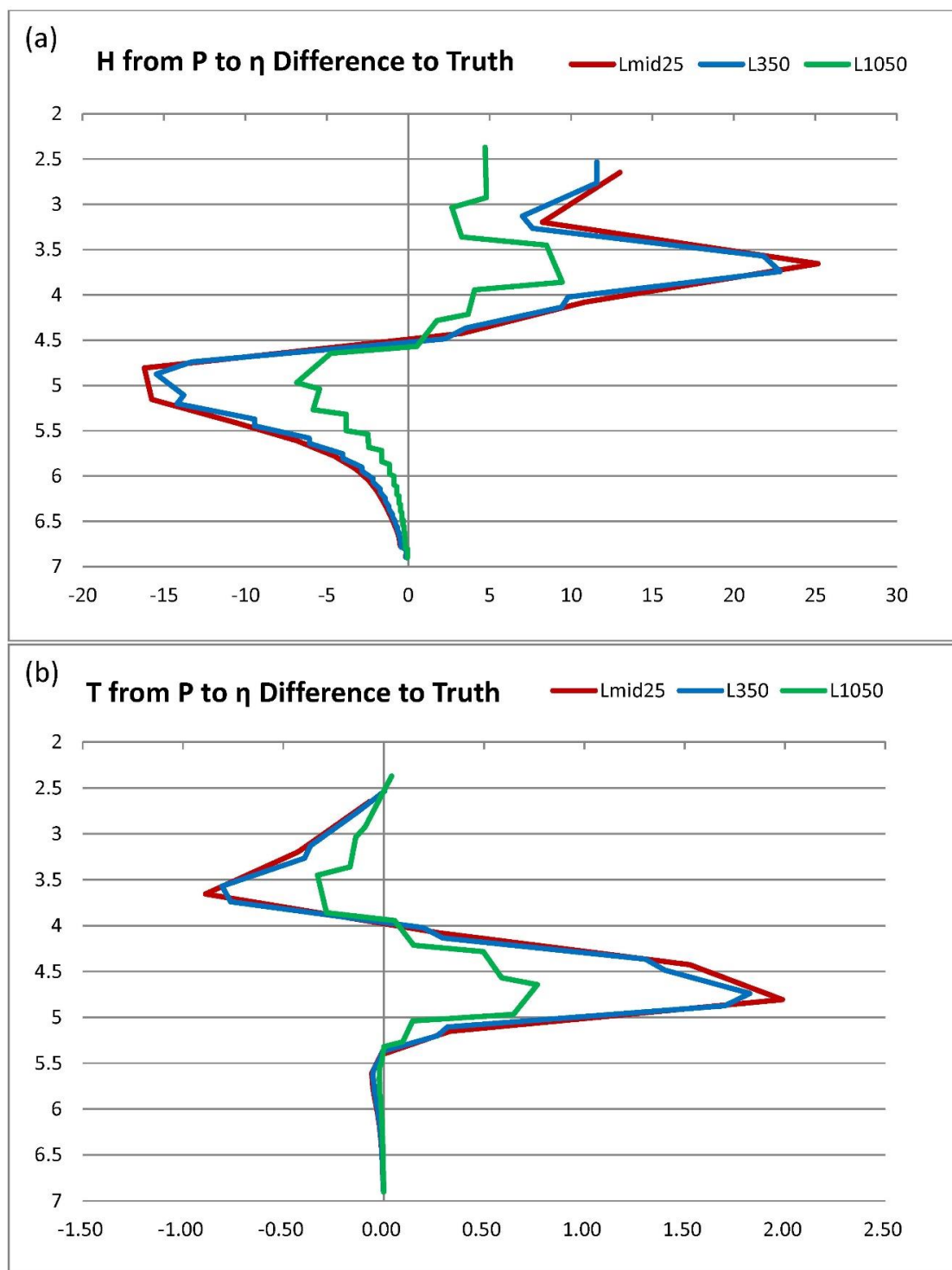


圖 6 (a) mid25、「350」、「1050」三組實驗高度場經線性內插(L)的垂直誤差分布，單位為公尺(m)。(b)同(a)，但為溫度場，單位為 $^{\circ}\text{C}$ 。縱軸為 $\ln(P)$ (百帕)。

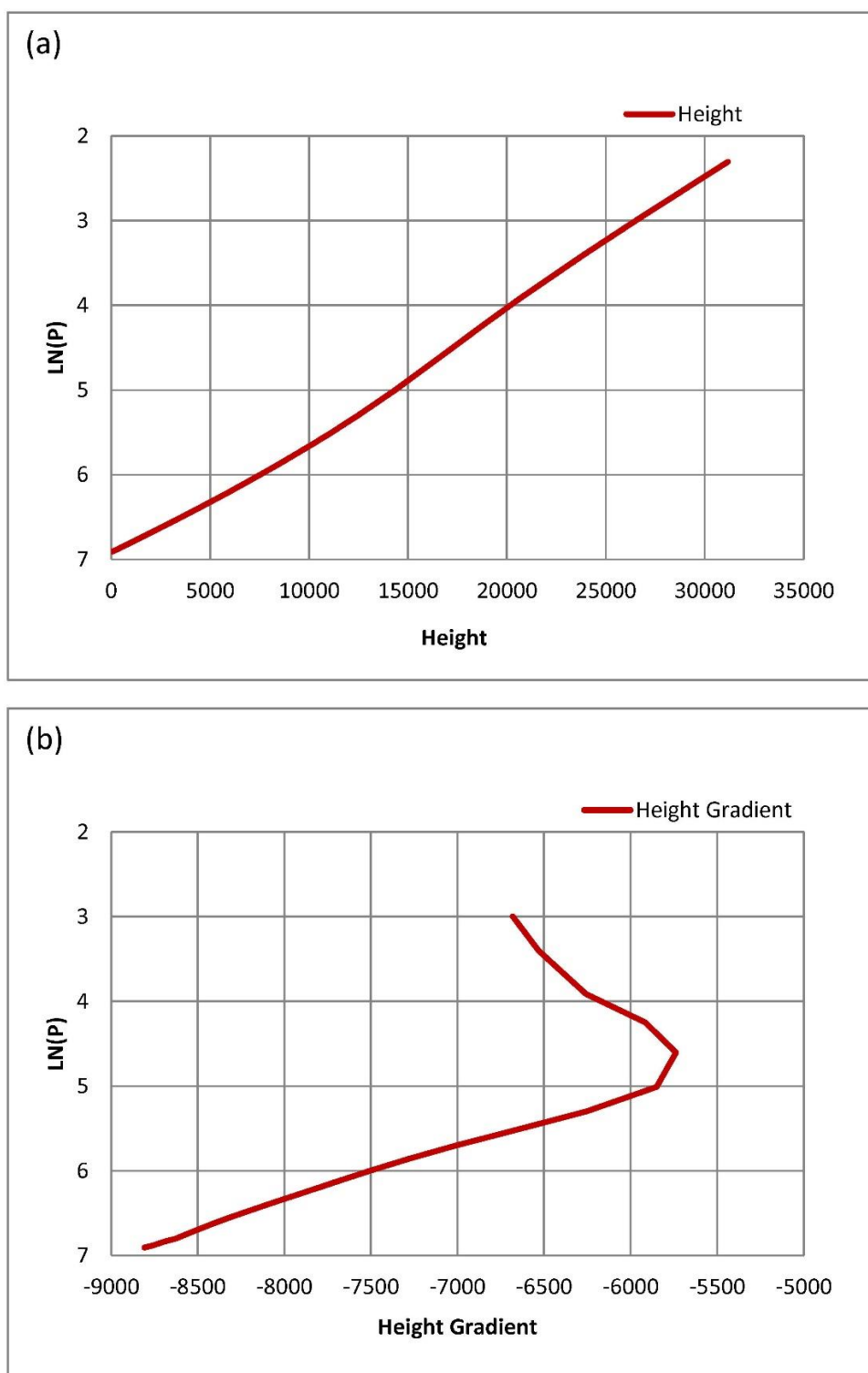


圖 7 (a)探空資料高度場的垂直分布圖，縱軸為 $\ln(P)$ (百帕)，橫軸為高度(m)。(b)高度場的斜率。

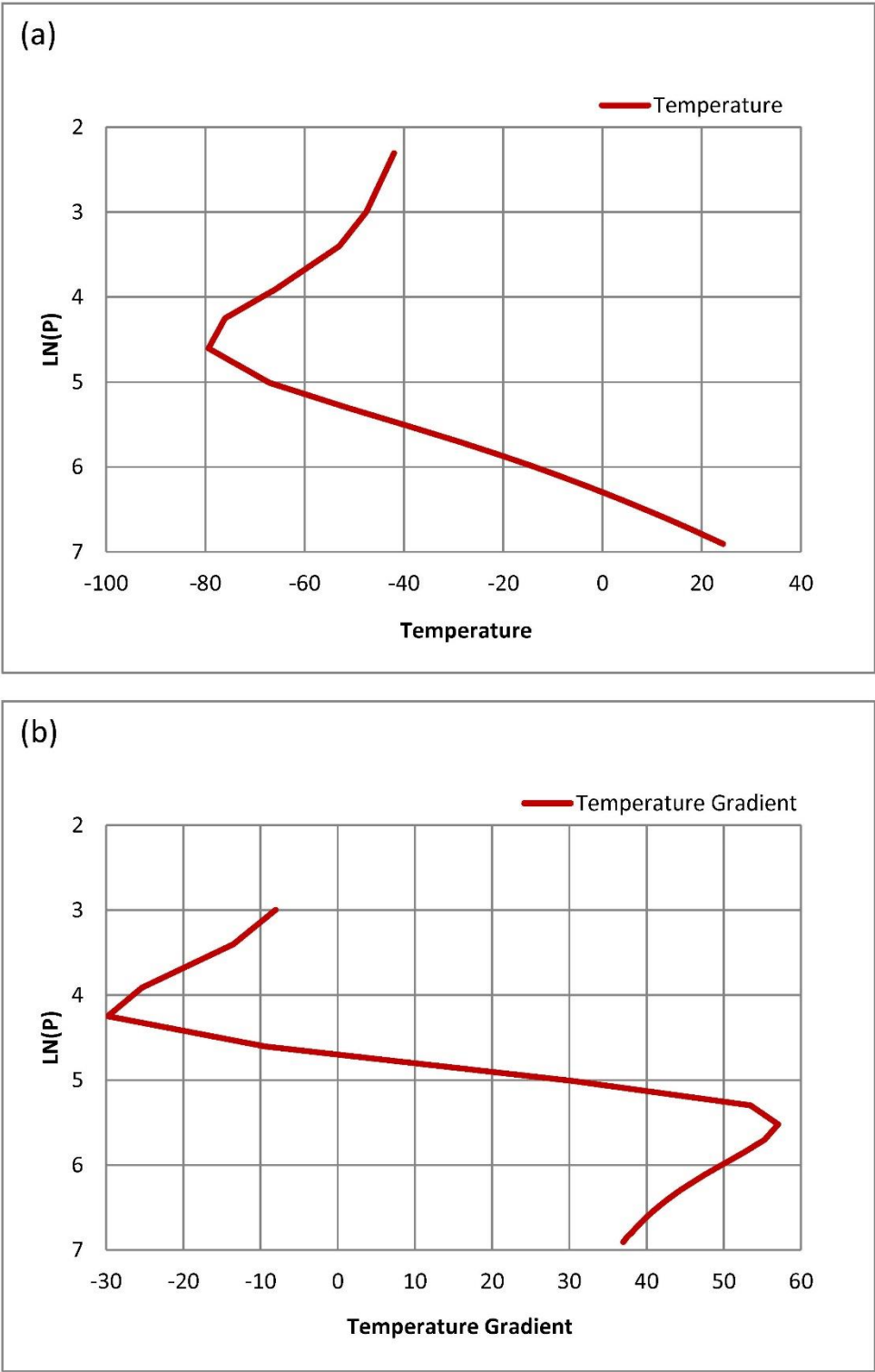


圖 8 同圖 7，但為溫度場 (°C)。

此外，圖 6 亦顯示，當層數自 25 層的 Lmid25 變為兩倍 50 層的 L350，內插結果與真實場的差異的確有所下降，因此模式分層越多（即垂直解析度越高）的確有助於解析大氣的垂直結構。不過 L350 與 L1050 雖然有著相同的垂直層數，垂直解析度也相同，但是 L1050 的新座標位置較 L350 更靠近原始資料的等壓層，因此內插所產生的誤差也隨之變小。以上分析顯示，垂直解析度以及模式分層與原始等壓層之間的距離都是影響內插誤差的重要因素。

以前述結論為基礎，我們使用誤差最小的「1050」垂直分層，搭配 real 內建的一次式(L1050)、二次式(Q1050)、三次式(31050)以及新增的三次仿樣內插法(S1050)，進行不同垂直內插方法的誤差分析。結果如圖 9 所示，高度場及溫度場的結果相當類似，誤差最小的實驗都是 S1050，其次是差異不明顯的 31050 與 Q1050，誤差最大的是 L1050。從此處測試可以知道三次仿樣內插法的垂直內插效果最好，這可能是因為三次仿樣內插法有著擬合所有已知資料點，以及任意兩條相鄰曲線於已知資料點上有相同的斜率與曲率的特性，這使得在一個較為平滑的函數下，能有較小的內插誤差。

為進一步將上述分析之結論應用於實際個案中，我們直接自花蓮站 2012 年 5 月 31 日 0000 UTC 的探空資料中取出 16 層等壓層²的溫度與高度資料，分別使用上述 4 種內插法內插到模式分層後再將其內插回 16 層等壓層上進行誤差分析。由於三次式與二次式內插法的誤差相近，在此忽略三次式內插法的結果分析。圖 10 與圖 11

為高度及溫度場資料經三種垂直內插方法內插到「1050」的模式分層後，再分別以線性內插和二次式內插法內插回等壓層上與原始資料相比的誤差結果，其實驗設計如表 2 所示。圖 10 中的線段名稱 HL_fr_L1050，代表將原始資料線性內插至「1050」分層(L1050)之高度場(H)，再使用線性內插法(L)內插回標準層的測試，依此類推高度場的部分可代換為溫度場(T)，垂直內插方法的部分可代換為二次式內插(Q)與三次仿樣內插法(S)。圖 10 顯示使用三次仿樣內插法內插至「1050」模式層的資料再透過線性內插法內插回 16 層標準層的誤差最小，比使用一次式和二次式內插法的結果還要小了許多。另外，使用二次式內插法內插回 16 層標準層，能得到比線性內插更小的誤差，如圖 11 所示。因此我們可以瞭解將模式資料內插回校驗資料所在的等壓層，其所使用的垂直內插方法對於校驗結果也會有一定程度的影響。

四、實際個案測試結果

在前述針對垂直內插誤差的理想化測試中可以發現垂直解析度、模式分層與全球模式資料等壓層間的距離以及垂直內插方法都會影響垂直內插導致的誤差大小。由於 WRF 模式垂直座標系統的壓力是根據表面氣壓制定，而在一個廣大的積分範圍內每個網格點上的表面氣壓(P_{sfc})都不盡相同，進而導致每一格點上 η 分層的壓力與全球模式等壓層的分佈關係也不同，因此無法固定模式分層與全球模式等壓層之間的關係。本研究在實際個案實驗中，以增加垂直解析度期望達到降低模式分層與等壓層間的距離，以及不同的垂直

² 16 層等壓層分別為 1000 hPa、925 hPa、850 hPa、700 hPa、500 hPa、400 hPa、300 hPa、250 hPa、200 hPa、150 hPa、100 hPa、70 hPa、50 hPa、30 hPa、20 hPa、10 hPa。

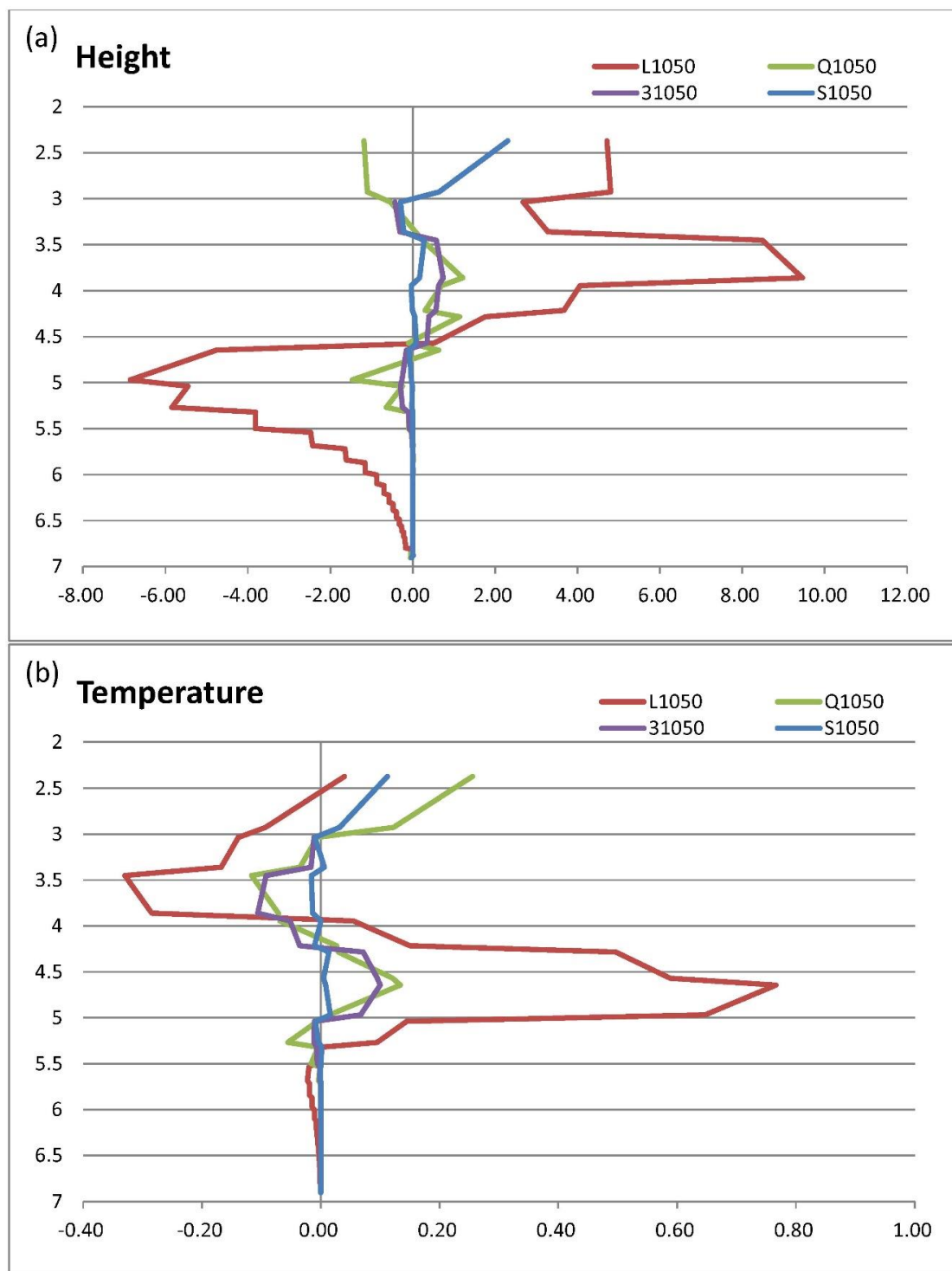


圖 9 實驗分層「1050」經四種垂直內插方法的垂直誤差分布，L：線性內插，Q：二次式內插，3：三次式內插，S：三次仿樣內插法內插。(a)為高度場(m)，(b)為溫度場 ($^{\circ}\text{C}$)，縱軸為 $\ln(P)$ (百帕)。

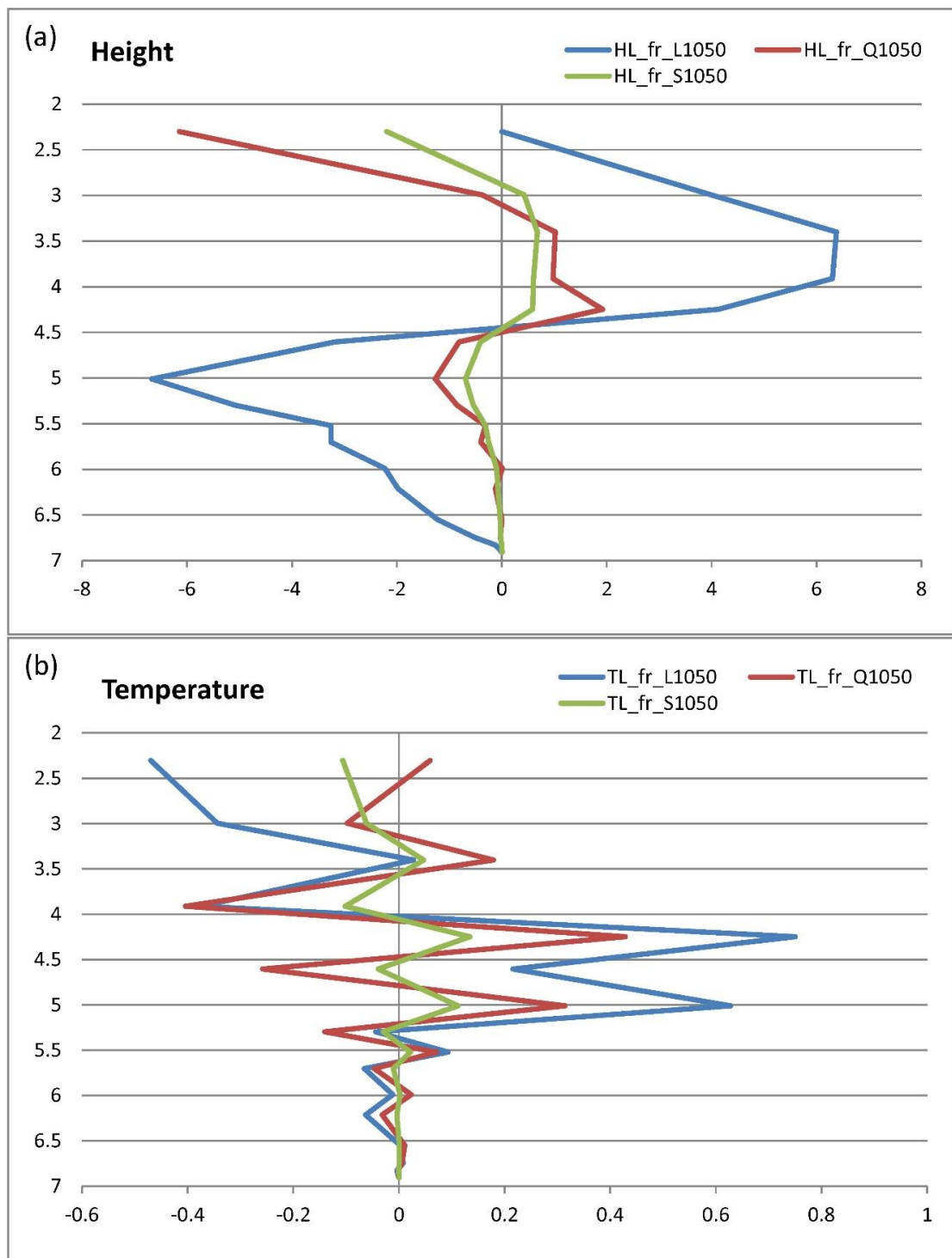


圖 10 使用三種內插方法 L ：線性內插， Q ：二次式內插， S ：三次仿樣內插法，針對 2012 年 5 月 31 日 0000 UTC 花蓮站探空資料內插至「1050」分層後，再線性內插回標準層之誤差分布(a)高度場(m)與(b)溫度場(°C)。

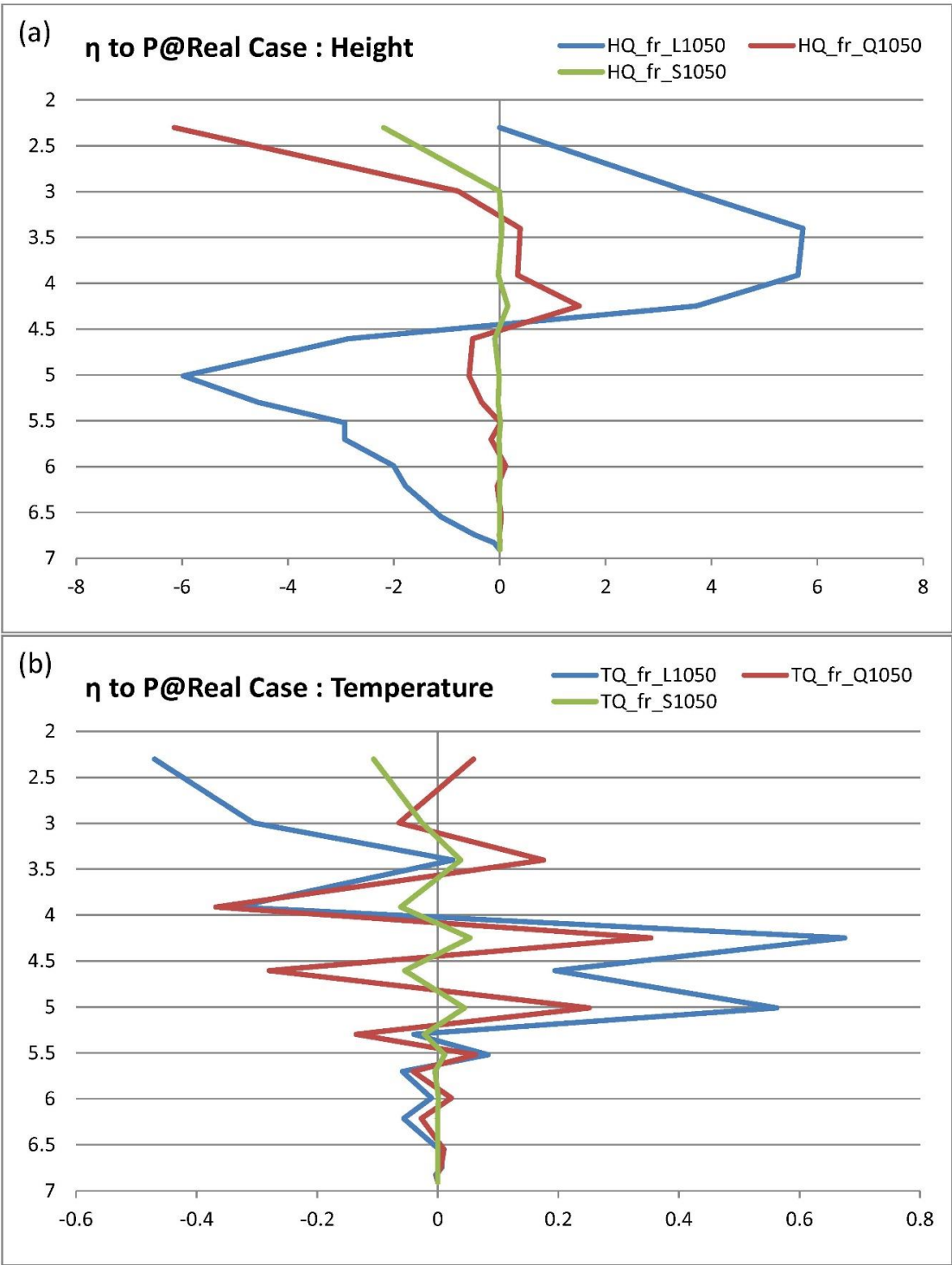


圖 11 同圖 10，此處為使用二次式內插回等壓層之誤差分布。

表 2 使用 16 層標準層實際探空資料之實驗設計，第一欄為內插回等壓層所用之內插方法，第一列則代表了使用不同種內插方式內插至「1050」分層， L 代表線性內插， Q 代表二次式內插， S 代表三次仿樣內插法內插，而 H 表示高度場， T 為溫度場。

	L1050	Q1050	S1050
<u>Linear</u>	(H/T)L_fr_L1050	(H/T)L_fr_Q1050	(H/T)L_fr_S1050
<u>Quadratic</u>	(H/T)Q_fr_L1050	(H/T)Q_fr_Q1050	(H/T)Q_fr_S1050

內插方法對於模式分析及預報結果進行討論。

(一) 模式設計

本研究所使用的模式是中央氣象局區域數值預報作業模式，氣象模式為 WRF V3.3.1，使用 ARW (Advanced Research WRF) 動力核心，模式層頂為 30 百帕，垂直分層為跟隨地形變化的 η 分層，總共 45 層。水平共有三層巢狀網格，水平網格間距由外而內分別是 45 km、15 km 及 5 km，積分範圍如圖 12 所示。本研究僅探討改變垂直解析度對於最外層、水平網格間距為 45 km 之積分範圍的影響。該模式使用 Goddard GCE 微物理參數法、YSU 邊界層參數法、Kain-Fritsch (new Eta) 積雲參數法和 RRTMG 長波、短波輻射參數法。為了簡化問題，本研究不考慮資料同化，僅討論從 NCEP 全球模式初始化為 WRF 模式的初始場所導致的內插誤差及其在模式預報中的影響。

為了降低高層模式 η 分層與等壓層之間的距離，我們以增加垂直解析度為目標，設計一個 55 層的新垂直分層，此一新的垂直分層以中央氣象局作業模式所用的 45 層模式分層為基礎，將模式層頂提高至 10 百帕，並且在 300 百帕至 10 百帕之間新增 10 層以提高高層的垂直解析度，300 百帕以下則保持與原始 45 層的模式分層相同，垂直分布如圖 13 所示。由於大氣在 300 百帕附近有較

大的垂直變化，因此本研究在 300 百帕以上增加垂直解析度以凸顯出垂直內插方法對初始化以及模式預報的敏感度。垂直內插方法則選用 WRF 模式內建之拉格朗日多項式內插法的線性內插（代號為 L ）與二次式內插（代號為 Q ），還有本研究在 WRF 嵌入的三次仿樣內插法（代號為 CS ）。實際個案測試時間選擇 2008 年 12 月 1 日 0000 UTC 至 12 月 10 日 1200 UTC，共 10 天 20 個個案，兩套垂直分層與三種垂直內插方法，共六組實驗，其詳細實驗設計如表 3 所示。

	45	55
<u>Linear</u>	45L	55L
<u>Quadratic</u>	45Q	55Q
<u>Cubic-Spline</u>	45CS	55CS

表 3 實際個案測試實驗設計，45 與 55 分別表示模式垂直分層數， L 代表線性內插， Q 代表二次式內插， CS 代表三次仿樣內插法內插。

(二) 提升高層垂直解析度的影響

首先我們比較垂直分層數量 45 及 55 層使用二次式內插（分別以 45Q 及 55Q 表示）與 NCEP 全球分析場之間的差異（線性內插與此結果相仿，故未示），分別計算其均方根誤差（Root Mean Square Error, RMSE）與平均誤差（Mean Error,

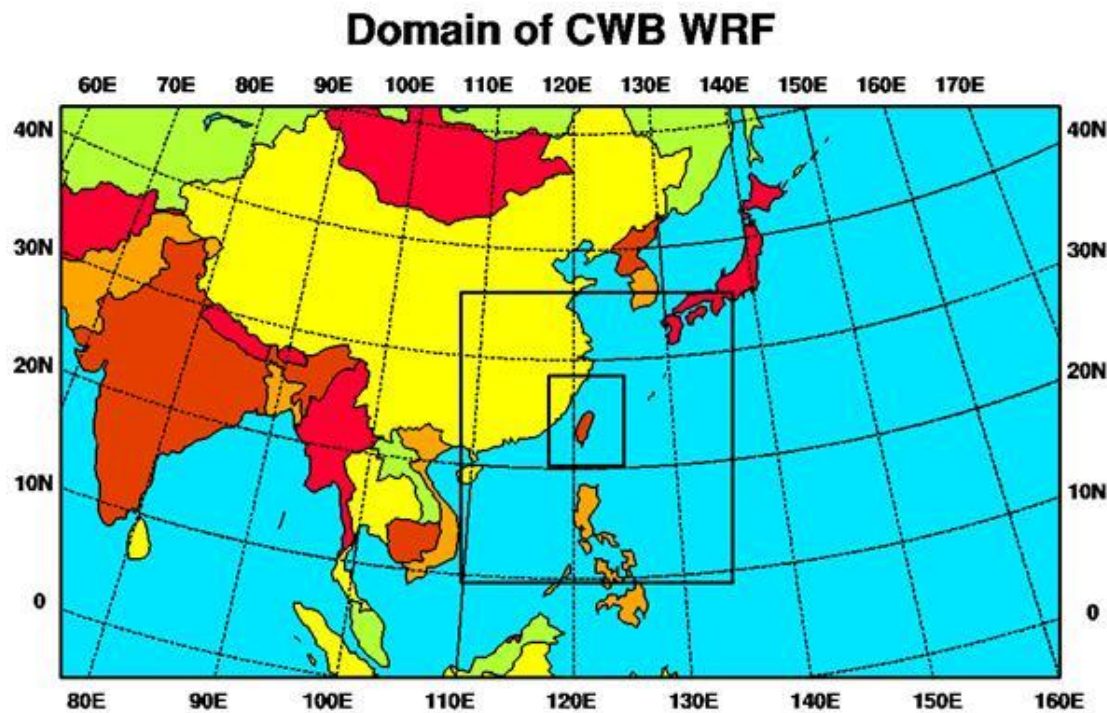


圖 12 中央氣象局區域數值預報作業模式的積分範圍。

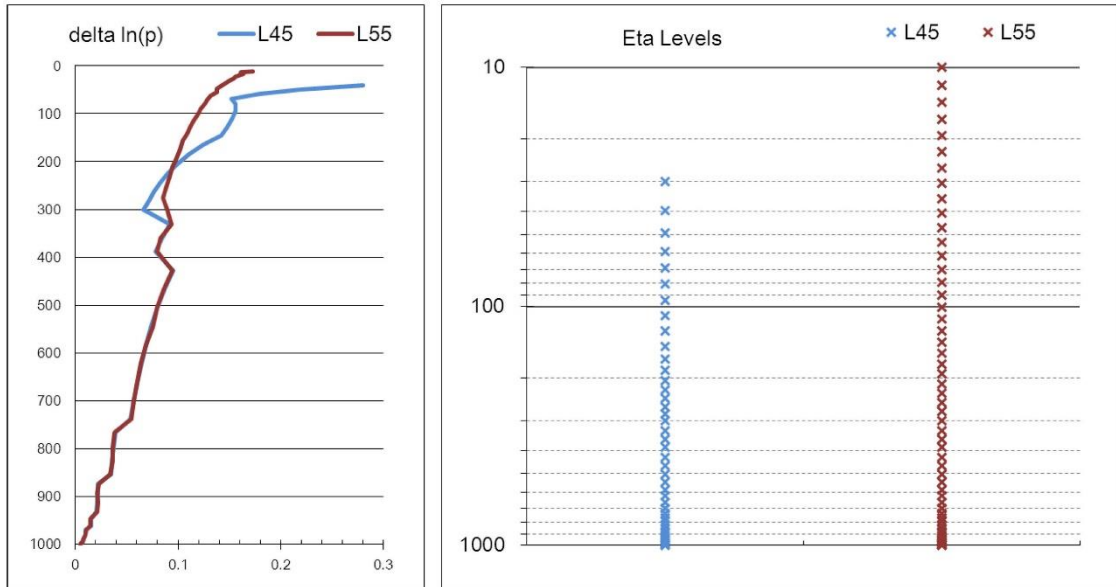


圖 13 45 層（藍色）與 55 層（紅色）模式垂直分層設計，左：分層厚度（ln(p)（百帕）），右：垂直分層。

ME)。圖 14 明顯看到在增加了 300 百帕以上的模式分層後，初始高度場高層 300 百帕以上的 RMSE 及 ME 都有顯著地改善，溫度場及風場的改善則集中在 100 百帕以上的區域。而使用此初始場進行 72 小時預報，兩者在高度場間的差異減少許多（圖 15），只有在 100 百帕以上 55Q 有較小的 RMSE，風場亦同。不過溫度場在 200 百帕以上有著明顯較小的 RMSE。由此可知，增加模式高層解析度與提高模式層頂對模式高層影響較顯著，但就統計而言，對模式 300 hPa 以下的預報改善有限。

(三) 不同垂直內插方法

圖 16 為垂直分層 55 層使用不同內插方法的初始場誤差比較，類似於不同垂直分層的測試結果，三種不同垂直內插方法的差異也都主要集中在高層 300 百帕以上，且不論是在高度場、溫度場還是風場都是使用線性內插(55L)的 RMSE 較大。而二次式內插法(55Q)與三次仿樣內插法(55CS)兩者在高度場並無明顯差異，可是在 300 百帕以上的溫度場及 500 百帕以上的風場，使用三次仿樣內插法都能夠明顯的降低 RMSE 和 ME。特別是在接近對流層頂 100 百帕的區域，三次仿樣內插法對於對流層頂附近溫度隨高度急遽的變化有更好的掌握能力。而 72 小時預報誤差結果比較如圖 17 所示，線性內插的 ME 特性和其他高次方內插法有顯著的不同，但必須注意，ME 會有正負抵銷的問題。而就 RMSE 而言，三次仿樣內插法與二次式內插法沒有顯著差異，但都明顯優於使用線性內插初始化的預報。

五、結論

本研究針對 WRF 模式的初始化過程，探討不同垂直內插方法產生的誤差，以及其在模式預報中的影響。在理想化實驗測試中，不論是使用拉格朗日多項式內插法或者三次仿樣內插法，只要在變數的斜率隨高度改變的區域（例如：溫度場接近對流層頂處）進行垂直內插，便會出現明顯的誤差，其中以線性內插的誤差最大，三次仿樣內插法的誤差最小。而且增加垂直解析度與降低模式分層與等壓層之間的距離，都能有效地減少垂直內插產生的誤差。

在使用真實探空資料的測試中，亦得到三次仿樣內插法有最小誤差的結果。更進一步，將模式資料內插回等壓面時，使用二次式內插法進行內插能得到比線性內插更小的誤差，這對模式校驗的準確度也會產生一定程度的影響。

實際個案測試的結果顯示，提高 WRF 模式層頂、高層模式層加密的分層設計，對模式初始場及 72 小時預報都能有所改善。另外，在不同垂直內插方法比較中，使用三次仿樣內插法進行垂直內插能夠明顯降低初始場在模式對流層頂、溫度發生急遽變化處的垂直內插誤差，在模式 72 小時預報中，三次仿樣內插法和二次式內插法的差異不大，但仍優於線性內插的結果。

最後值得一提的是，在不考慮資料同化的情形下，不同垂直內插法會影響到模式的初始場和邊界條件；若是在循環(Full cycle)資料同化策略下，這些影響只能透過邊界條件帶入模式預報，其改善程度將會顯著減小。此外，本方案已新增於 WRF V3.6 以後之版本，以提供 WRF 模式使用者更佳的垂直內插方法。

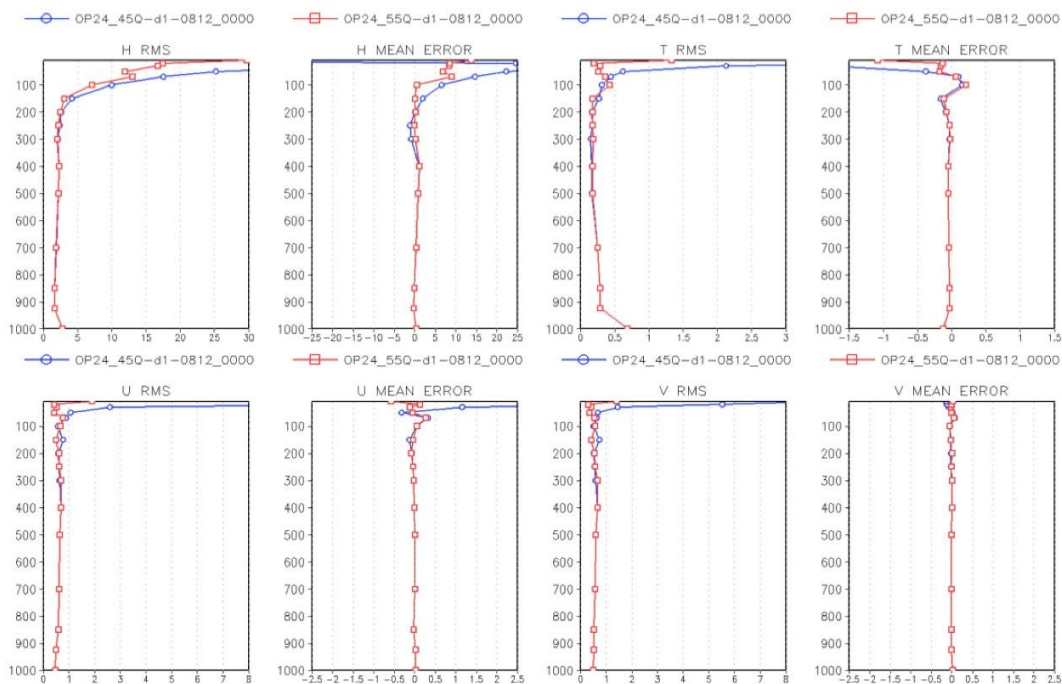


圖 14 45Q (藍線) 與 55Q (紅線) 初始場的 RMSE 及 ME 垂直分布，左上：高度場(m)，右上：溫度場(K)，左下：U 方向風場(m/s)，右下：V 方向風場(m/s)。

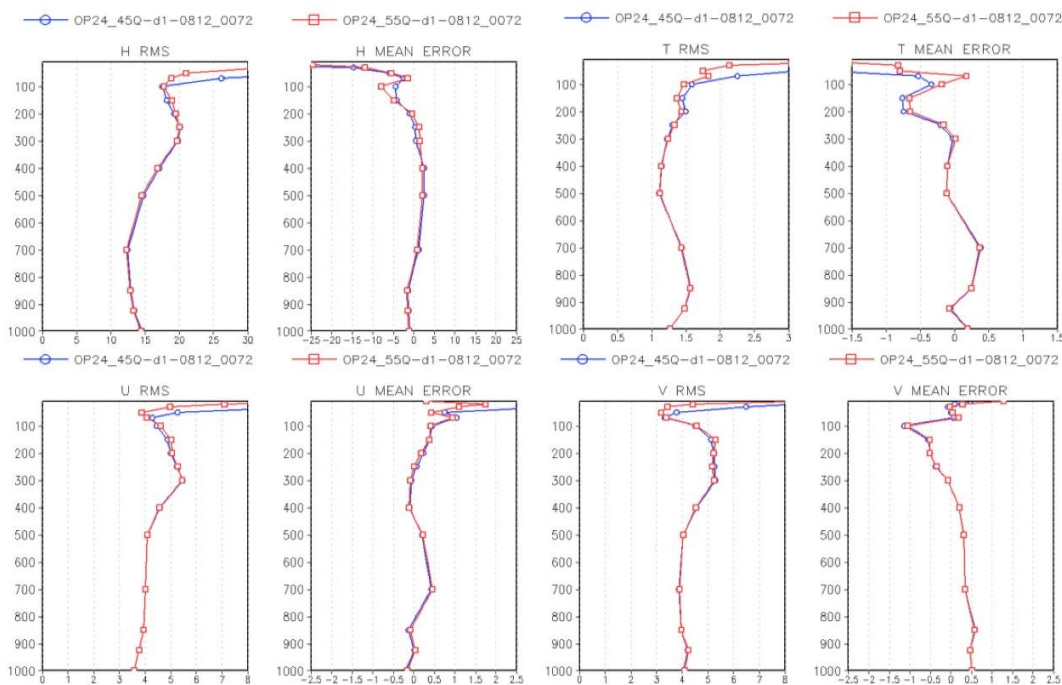


圖 15 45Q (藍線) 與 55Q (紅線) 72 小時預報的 RMSE 及 ME 垂直分布，左上：高度場(m)，右上：溫度場(K)，左下：U 方向風場(m/s)，右下：V 方向風場(m/s)。

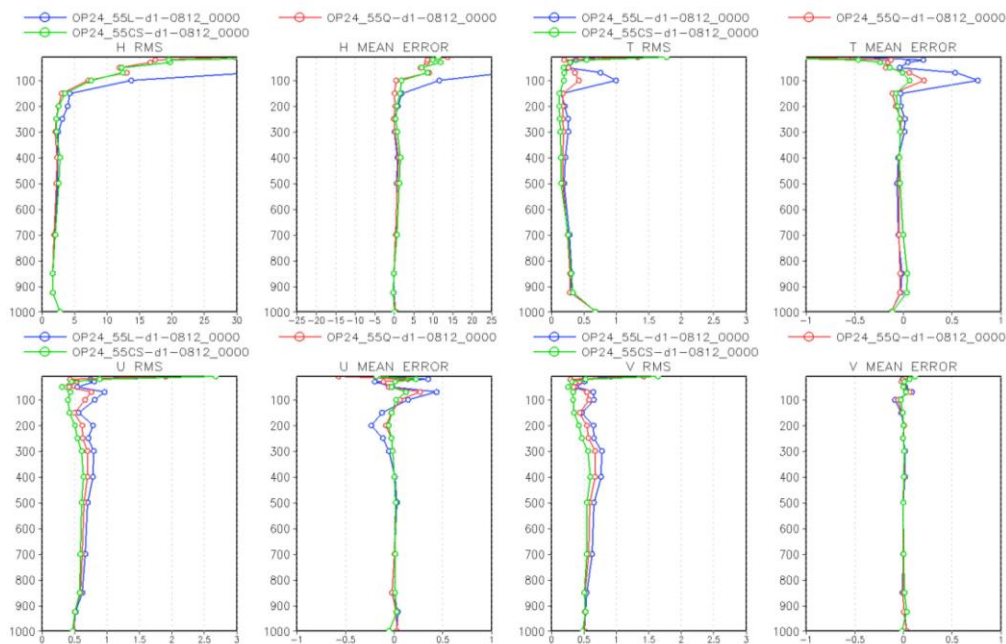


圖 16 垂直分層 55 層不同垂直內插方法之初始場的 RMSE 及 ME 垂直分布，藍線：線性內插，紅線：二次式內插，綠線：三次仿樣內插法。左上：高度場(m)，右上：溫度場(K)，左下：U 方向風場(m/s)，右下：V 方向風場(m/s)。

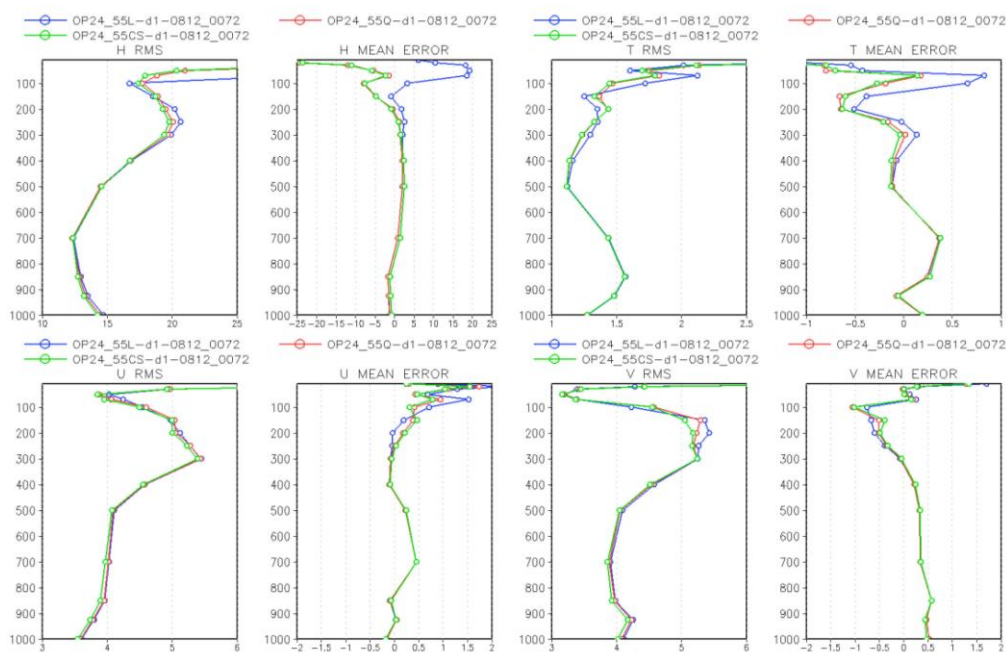


圖 17 垂直分層 55 層不同垂直內插方法之 72 小時預報的 RMSE 及 ME 垂直分布，藍線：線性內插，紅線：二次式內插，綠線：三次仿樣內插法。左上：高度場(m)，右上：溫度場(K)，左下：U 方向風場(m/s)，右下：V 方向風場(m/s)。

致謝

本研究在中央氣象局氣象資訊中心提供之計算支援以及科技部研究計畫 MOST 103-2625-M-052 -002 支援下完成。

參考文獻

- Aligo, E. A., W. A. Gallus Jr., and M. Segal, 2007: On the impact of WRF model vertical grid resolution on midwest summer rainfall forecasts. *Wea. Forecasting*, **24**, 575-594.
- Gaertner, M. A., and M. Castro, 1996: A new method for vertical interpolation of the mass field, *Mon. Wea. Rev.*, **124**, 1596-1603.
- Gerald, C. F., and P. O. Wheatley, 2003: *Applied numerical analysis*, 7th edition. Pearson Press, P624.
- Kimball, S. K., and F. C. Dougherty, 2006: The sensitivity of idealized hurricane structure and development to the distribution of vertical levels in MM5. *Mon. Wea. Rev.*, **134**, 1987-2008.
- Shen, R., E. R. Reiter, and J. F. Bresch, 1986: Vertical interpolation of meteorological variables. *Mon. Wea. Rev.*, **114**, 123-134.
- Wee, T.-K., Y.-H. Kuo, D.-K. Lee, Z.-Q. Liu, W. Wang, and S.-Y. Chen, 2012: Two overlooked biases of Advanced Research WRF (ARW) model in geopotential height and temperature. *Mon. Wea. Rev.* **140**, 3907-3918.
- Zhang, D.-L., and X. Wang, 2003: Dependence of hurricane intensity and structures on vertical

resolution and time-step size. *Adv. Atmos. Sci.*, **20**, 711-725.

附錄一：垂直內插方法介紹

(一) 拉格朗日多項式內插法

(Lagrange Polynomial Interpolation)

WRF 模式中 *real* 模組使用拉格朗日多項式內插法 (Gerald and Wheatley 2003) 進行垂直內插的計算，這是一種使用多項式的內插方法。在數學上如果已知兩點 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) ，我們可以找到一條通過這兩點的直線（一次方程式），如下式：

$$P(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} y_2 \quad [1]$$

如果已知任意三點 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 及 (x_3, y_3) ，則可找到一條通過此三點的二次方程式曲線，如下：

$$\begin{aligned} P(x) = & \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3 \end{aligned} \quad [2]$$

假設我們已知 n 個點 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) ... (x_n, y_n) ，那麼我們可以依照前述推論得知有一 $n - 1$ 次方程式通過此 n 個點。以下為此方法的方程式：

$$\begin{aligned} P(x) = & \frac{(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n)} y_1 \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_n)} y_2 + \cdots \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1})} y_n \end{aligned} \quad [3]$$

其中 $P(x)$ 為內插得到的數值， x 為內插點， $x_{1\sim n}$ 及 $y_{1\sim n}$ 為曲線通過的已知點。不過在 WRF 的預設中，至多做到二次式內插，若要使用更高次方的拉格朗日多項式內插則必須改寫 *real* 原始碼，使其正確運算，因此在實際個案測試中並未探討高於二次的拉格朗日多項式內插。

(二) 三次仿樣內插法

(Cubic-Spline Interpolation)

三次仿樣內插法(Gerald and Wheatley 2003)是廣泛應用在多種領域上的內插方法，主要概念如下。已知 $n + 1$ 個資料點 (x_0, y_0) 、 $(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$ ，共有 n 條線段，每條線段我們都會賦予通過兩端點的三次方程式，這 n 個三次方程式曲線都必須與相鄰的曲線在節點上有著相同的梯度與曲率，如此一來除了兩端的線段外，中間每一段線段的曲線方程式都相互約束。而兩端的區間只有一側存在曲線，因此必須另行給定其約束條件，根據不同約束條件可以分成四種不同的三次仿樣內插法種類，在本研究中所使用的是 *Natural Spline*，其條件為設定三次仿樣函數在起始點 (x_0) 與終點 (x_n) 的二次微分值為 0，二次微分等於 0 對於三次函數而言意味著反曲點，因此在接近端點處的內插效果會類似於線性內插。接下來將詳細介紹三次仿樣內插法的運算方法。這 n 條曲線可用下列方程式表示：

$$g_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

其中

$$i = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \quad [4]$$

並且滿足以下條件：

$$g_i(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n - 1$$

並且

$$g_{n-1}(x_n) = y_n \quad [5]$$

$$g_i(x_{i+1}) = g_{i+1}(x_{i+1}), i = 0, 1, \dots, n - 2 \quad [6]$$

$$g'_i(x_{i+1}) = g'_{i+1}(x_{i+1}), i = 0, 1, \dots, n - 2 \quad [7]$$

$$g''_i(x_{i+1}) = g''_{i+1}(x_{i+1}), i = 0, 1, \dots, n - 2 \quad [8]$$

其中[5]式表示三次仿樣函數能通過每一筆資料，並且為一連續函數（[6]式），以及梯度與曲率也是連續的（[7]、[8]式）。在此三次仿樣函數中，我們共有 n 條曲線函數，每一個函數都有 a_i, b_i, c_i, d_i 四個未知數，因此若要在此函數上求得任一位置所對應的數值，必須先得知每一函數的每一個未知數，總共有 $4n$ 個。

首先，根據[5]式我們即可得到 $d_i = y_i, i = 0, 1, \dots, n - 1$ 。如此[6]式可以改寫成以下形式：

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= g_{i+1}(x_{i+1}) = g_i(x_{i+1}) \\ &= a_i(x_{i+1} - x_i)^3 + b_i(x_{i+1} - x_i)^2 \\ &\quad + c_i(x_{i+1} - x_i) + d_i \\ &= a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + y_i \end{aligned}$$

其中

$$i = 0, 1, \dots, n - 1, h_i = (x_{i+1} - x_i) \quad [9]$$

對[4]式做一次微分與二次微分可以得到

$$g'_i(x) = 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_i(x - x_i) + c_i \quad [10]$$

$$g''_i(x) = 6a_i(x - x_i) + 2b_i$$

$$\text{其中, } i = 0, 1, \dots, n - 1 \quad [11]$$

令 $S_i = g''_i(x_i)$ 且 $S_n = g''_{n-1}(x_n)$ ，可得

$$S_i = 6a_i(x_i - x_i) + 2b_i = 2b_i \quad [12]$$

$$S_{i+1} = 6a_i(x_{i+1} - x_i) + 2b_i = 6a_i h_i + 2b_i \quad [13]$$

因此，

$$b_i = \frac{S_i}{2}, \quad a_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{6h_i} \quad [14]$$

接著將 a_i, b_i, d_i 代入[9]式，求解 c_i

$$y_{i+1} = \left(\frac{S_{i+1} - S_i}{6h_i} \right) h_i^3 + \frac{S_i}{2} h_i^2 + c_i h_i + y_i$$

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6} \quad [15]$$

引入[7]式條件，其代表在 (x_i, y_i) 兩端的曲線於 (x_i, y_i) 的梯度是相同的，所以在區間 (x_i, x_{i+1}) ，[7]式可改寫如下，其中 $x = x_i$ ：

$$\begin{aligned} y'_i &= 3a_i(x_i - x_i)^2 + 2b_i(x_i - x_i) + c_i \\ &= c_i \end{aligned} \quad [16]$$

而在另一側區間 $[x_{i-1}, x_i]$

$$\begin{aligned} y'_i &= 3a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + 2b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1} \\ &= 3a_{i-1}h_{i-1}^2 + 2b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1} \end{aligned} \quad [17]$$

因[16]式、[17]式相等，並將此前求得之 a, b, c, d 代入可得

$$\begin{aligned} y'_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6} \\ &= 3 \left(\frac{S_i - S_{i-1}}{6h_{i-1}} \right) h_{i-1}^2 + 2 \left(\frac{S_{i-1}}{2} \right) h_{i-1} \\ &\quad + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{2h_{i-1} S_{i-1} + h_{i-1} S_i}{6} \end{aligned} \quad [18]$$

簡化後可以得到

$$\begin{aligned} &= 6 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \\ &= 6(f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]) \end{aligned} \quad [19]$$

其中 $i = 1, 2, \dots, n-1$ ，如此一來[19]式中我們將已知 y_i 與 h_i 便可透過矩陣運算，如[20]式所示，得到 S_i ，但是我們無法透過[20]式計算 S_0 與 S_n ，因此必須透過事前給定的方式，如同前述，在本研究中我們使用 *Natural Spline* 的條件，設定 S_0 與 S_n 都等於 0。

$$\begin{bmatrix} h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & & & \\ & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & \\ & & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{n-1} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1] \\ f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2] \\ f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3] \\ \vdots \\ f[x_{n-1}, x_n] - f[x_{n-2}, x_{n-1}] \end{bmatrix} \quad [20]$$

最後我們將 $S_i, i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1, n$ ，代入以下四式

$$a_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{6h_i};$$

$$b_i = \frac{S_i}{2};$$

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6};$$

$$d_i = y_i$$

即可得到 n 條曲線的係數與方程式，接著再將欲內插的 x 值代入其所屬區段之曲線，就能得出對應之內插值。

The Investigation of Vertical Interpolation in WRF Initialization Procedure

Shih-Wei Wei and Jing-Shan Hong

Central Weather Bureau

(manuscript received 1 May 2015 ; in final form 14 August 2015)

ABSTRACT

Initialization is an important procedure for regional model, it usually includes variables transformation, reconstruct surface pressure, horizontal and vertical interpolation. It is found that the apparent error was occurred in the WRF's initial condition as initialized by real, the initialization module of the WRF model. In this paper, the error characteristics based on the different interpolation schemes were studied to improve the initialization performance in WRF model

In summary, the vertical resolution, the vertical distribution of the model levels, and the interpolation schemes, all play important roles for the interpolation error. The higher vertical resolution, and the better fit between the model levels and the isobaric layers introduce the smaller interpolation errors. The cubic-spline interpolation scheme outperforms the Lagrange polynomial interpolation scheme. The linear interpolation scheme has the largest error.

In the real cases study, the higher vertical resolution results in the smaller interpolation error both in the initial condition and the 72-hr forecast. The cubic-spline interpolation scheme outperforms the other schemes in the initial condition; while the 72-hr forecast performances are comparable for cubic-spline and Lagrange polynomial interpolation scheme, the linear interpolation make the largest forecast errors.

Key Words: Initialization, Vertical interpolation, Cubic-Spline interpolation scheme

