

賀伯颱風眼轉動可能機制探討

郭鴻基 林宗賢 陳建河 吳佳純

國立台灣大學大氣科學系

(中華民國八十七年四月二十八日收稿；中華民國八十七年十月十二日定稿)

摘 要

由雷達回波得知 1996 年侵台賀伯颱風的颱風眼為橢圓形。此橢圓颱風眼以 144 分鐘周期反鐘向旋轉。橢圓颱風眼之長軸約為 30km，短軸約為 20km，而颱風最大風速約為 60m/s，颱風眼旋轉周期明顯大於空氣平流繞行颱風眼之時間（約為 50 分鐘）。我們以線性與非線性理論解釋此眼之旋轉。此二理論皆強調了颱風眼附近中性位渦波的重要性。此位渦波之存在是因為颱風眼內之位渦較外部大，因此在位渦梯度上產生位渦波動。以賀伯颱風為例，線性及非線性理論的結果是一致的。

我們以線性不穩度分析，了解正壓不穩度對位渦波的影響。我們並討論可以影響颱風結構的不同物理機制，對於颱風眼旋轉的影響。

關鍵詞：位渦波，正壓不穩定，颱風眼動力

一、前 言

颱風是台灣最重大的天氣災害，其雨量亦是台灣地區最重要之水資源。以 1995 年為例，許多颱風過門而不入，造成缺水及限水問題，從而嚴重影響農耕及經濟民生。另一方面 1995 年的賴恩颱風於 9 月 22 日掠過恆春半島外海，因為路徑預報之小誤差，使台灣大部份地區民眾度過一個少風少雨的颱風假日，也使國家損失一天的經濟生產（上百億損失）。而 1996 年的賀伯

颱風，雖然氣象局近乎完美的路徑預報，但因防災體系運作不落實，台灣仍承受了近二十年來最大天然災害，這些例子顯示，颱風對台灣的重要性；其重要性在於(1)直接、間接的破壞（豪雨、強風和暴潮）；(2)颱風假期（侵台乃至離台後）對經濟面之重大衝擊；(3)水資源之規畫。以台灣而言，因為風雨形態被地形相位鎖定，準確的風雨預報往往取決於準確的路徑。以應用問題解決的優先性，路徑預報無疑是最重要的地位。另一面而言，了解颱風基本動力，也應是台灣研究

颱風之重點。本短文即是在探討侵台賀伯颱風眼的可能旋轉機制。

1996 年，風速高達 60m/s (Jou et al. 1997, Lee, 1997) 的強烈颱風賀伯在接近台灣時，摧毀了剛啓用的五分山雷達，由雷達被毀損前回波圖觀察到颱風眼為橢圓形，此橢圓形以 144 分鐘的

周期反鐘向旋轉了二圈。圖 1 及圖 2 的九張雷達圖的時間順序為由上而下左而右，每張圖之間距離為 18 分鐘；九張圖分別顯現當時觀測到的兩個完整的 144 分鐘周期。從這些圖可知，橢圓形的長軸半徑約為 30km，短軸半徑約 20km，長軸的兩端常常有深對流。在其他未附於本文的雷達

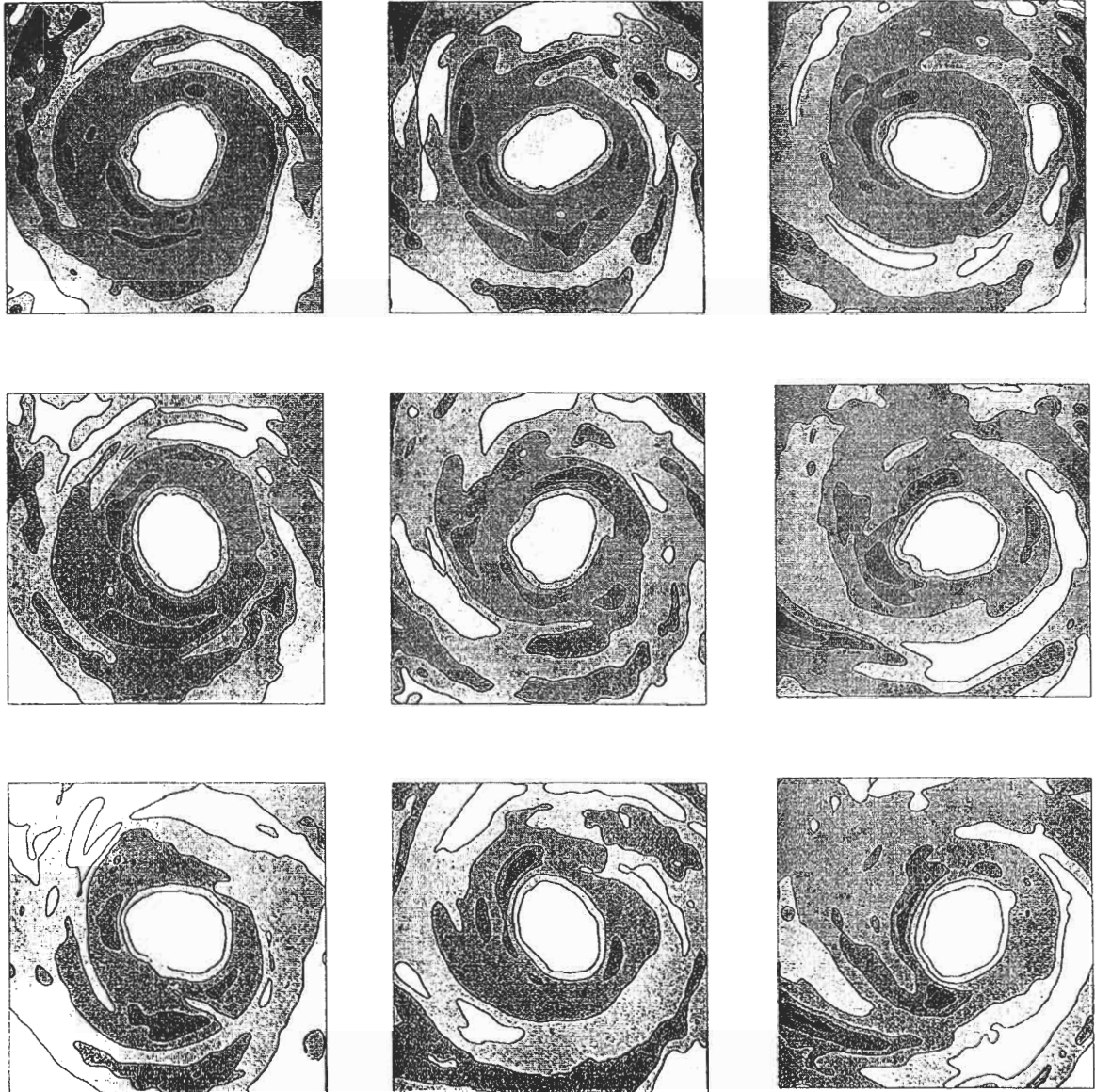


圖 1 五分山雷達觀測賀伯颱風，在垂直方向中最強回波的雷達圖；可清楚看到颱風眼為橢圓形，雷達圖由上而下由左而右，每張圖之間距為十八分鐘，橢圓形颱風眼以 144 分鐘的周期反鐘向旋轉。

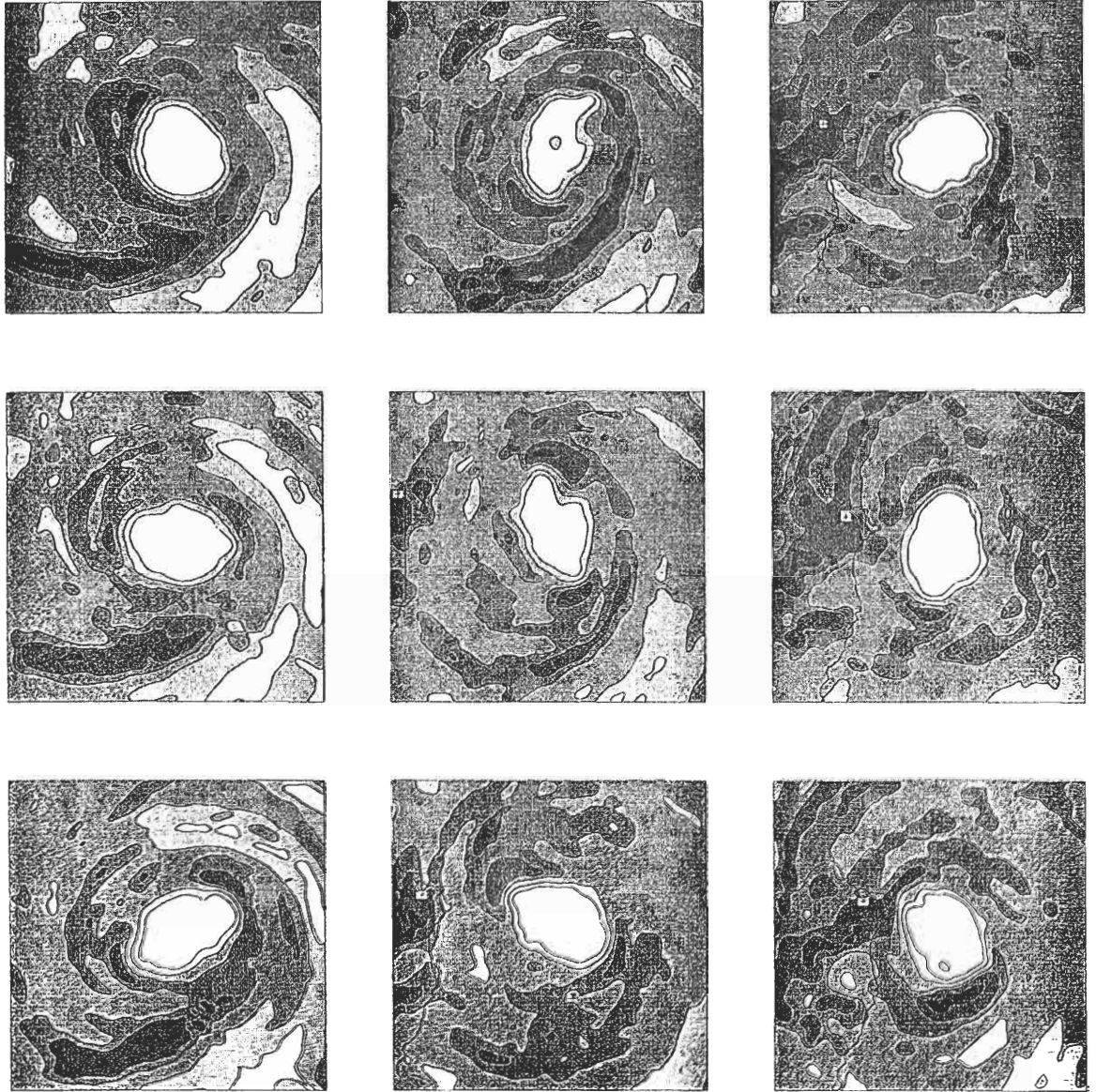


圖 2 類似圖 1，為颱風眼旋轉的第二個周期。

PPI 圖中，顯示每一層裡，橢圓形的眼牆仍是主要特徵；我們並沒有在任一層中發現多邊形的特徵。

依據觀測到的最大風速 60m/s 和長短軸的半徑，我們可以推測空氣塊繞眼牆一圈約 50 分鐘；這比觀測到的眼牆旋轉周期 144 分鐘少。賀伯颱風橢圓形眼牆長時間的存在與旋轉，及 144

分鐘的旋轉周期，是在先前的研究中未被發現過的。本短文探討造成橢圓形眼旋轉的可能動力機制，我們強調由於颱風位渦結構伴隨的位渦波動力的重要性。第二節我們回顧多邊形颱風眼的相關研究；第三節討論橢圓颱風可能旋轉之機制，此機制可分為線性及非線性兩大類理論，此兩種理論皆和位渦波運動密切相關；第四節我們則以理想渦旋結構進行穩度分析，以了解正壓不穩定

度對渦旋結構，乃至於對位渦波運動之影響。第五節則是總結與討論。

二、多邊形颱風眼相關研究回顧

雖然大多數人都以為颱風眼是圓形的，從發表的文獻上，Lewis and Hawkins (1982)最早注意到多邊形颱風眼的存在，在分析許多觀測資料及雷達圖後，他們發現了一些重要現象：

(一)多邊形颱風眼牆以氣旋式旋轉。

(二)颱風眼可以是三角形、四邊形、五邊形及六邊形；雖然形狀通常不完整，但仍可從其直邊或有角度的結構識別。而且所謂螺旋雨帶亦可以呈現多角方式彎曲。

(三)在多邊形的眼牆結構出現前，通常橢圓形或圓形的颱風眼會先短暫的出現。

Lewis and Hawkins 認為這樣的資料，並不是觀測工具本身的問題。這是因為不同的雷達觀測許多不同的颱風，都可看到多邊形的結構。由於雷達通常是位於陸地上，是不是因為地形的關係導致多邊形的颱風眼？但他們也經由飛機雷達在離陸地數百公里的海上的觀測，也觀察到多邊形的颱風眼，印證了多邊形颱風眼的產生並非僅是近陸地時的現象。

Muramatsu (1986)分析 1980 年侵襲日本的 Wynne 颱風，在連續 15 小時（颱風中心氣壓介於 920–935hPa，直徑約 30km）的雷達與衛星雲圖中，觀察到四邊形、五邊形及六邊形的颱風眼結構，雖然他並未觀察到三角形的眼牆，但再次印證多邊形的颱風眼確實存在。他的觀測也顯示，不同多邊形結構會有不同的旋轉周期，愈多

邊形其旋轉周期愈短；多邊形的颱風眼牆通常出現在發展良好的颱風眼結構。他雖然沒有提到動力的定理，但曾暗示此現象應該與颱風眼牆內側有很大的風切，所引起的不穩定有關。所有 Muramatsu (1986)觀測到的颱風眼反鐘向旋轉周期皆小於 1 個小時。

關於多邊形颱風眼的形成原因，Willoughby (1978)、Kurihara (1976)認為是因為眼牆中存在不同周期、波數的慣性重力波，經局部反射造成多邊形的颱風眼。Guinn and Schubert (1993)討論颱風眼與眼牆位渦波的動力過程，他們認為渦旋不斷的進行對稱化過程，此對稱化動力過程中波破碎形成帶狀位渦是雨帶形成的重要原因。在對稱化過程中，位渦波動扮演重要角色。這些位渦波的交互作用是不是會產生多邊形颱風眼呢？這些位渦波是不是會產生颱風之加強？這些還需要更深入的探討。

三、賀伯橢圓颱風眼旋轉之理論分析

(一)線性理論

若考慮橢圓形颱風眼如同一個波數 2 的不對稱圓形眼，我們的思路和 Thompson (1880)及 Guinn and Schubert (1993)相同，也就是此橢圓之轉動可以視為圓形渦旋，以及其周圍位渦梯度擾動位渦波的運動。簡單而言，我們將颱風視為一高位渦區，而將颱風眼轉動視為位渦波在渦旋平均流下之運動。圖 3 為此機制之示意圖，由圖 3 可知，接近眼牆不對稱的波數 2 的波，應會向著平均流的上游傳播，這會使得橢圓的眼相對於平均流以順鐘向旋轉。然而，在颱風中強氣旋切線平均流的影響下，不對稱波應向下游傳遞，但傳遞的速度比平均流的速度為小，這向位渦梯度右

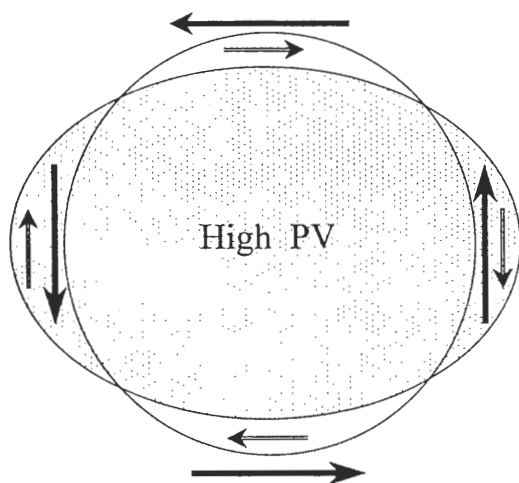


圖 3 線性位渦波旋轉之示意圖。細雙線條為沒有基本流時，位渦波的移動方向，粗線條為基本流方向；當波數 2 時，基本流為位渦梯度產生的流速的兩倍，即整體結果，會以 0.5 倍的基本流速向反鐘向方向移動。

側之傳送使得眼以反鐘向旋轉。這不對稱的波（波數 2）之傳遞符合橢圓氣旋的傳遞。在 Rankine Vortex 上之位渦的線性分析是由 Thomson 於 1880 所完成的，而詳細的整理可見 Lamb (1932) 和 Guinn and Schubert (1993)，他們的分析指出波速是

$$c = V_{\max} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \quad (1)$$

上式中 $V_{\max}$ 為氣旋平均流之最大切速度； m 為不對稱波數。

方程式中可以看到波數 1 是常駐波，而波數 2, 3, 4 分別會以最大切速度的 1/2、2/3 及 3/4 向氣旋方向移動。如果是橢圓眼，我們可視波數為 $2(m=2)$ （多邊形颱風眼的波數大於 2），則角速度為

$$\omega_a = \frac{c}{r} = \frac{V_{\max}}{2r} \quad (2)$$

而周期為

$$P_{m=2} = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{8\pi}{\zeta} \quad (3)$$

在這裡 Rankine Vortex 結構中，眼的範圍內渦度為

$$\zeta = \frac{2V_{\max}}{r}$$

當周期為 144 分時，渦度強度(由方程式得)為 $3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ 。以颱風賀伯為例， $3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ 的渦度場相當於最大風速 60m/s，這和實際觀察到的風速相符(Lee, 1997)。在這個個案中，線性理論預測出和賀伯颱風觀測相符的的周期。

由(1)式，周期可以寫成以波數的通式型態來表示：

$$P = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi r}{V_{\max}(1 - 1/m)} = \frac{4\pi}{\zeta(1 - 1/m)} \quad (4)$$

由(4)可以知道愈高的波數旋轉周期愈短，也就是反鐘向旋轉愈快。這定性的分析與 Muramatsu (1986) 所觀察的周期特性均符合，也就是當多邊形的邊數增加時所造成的周期減少。若波數為 4，則波速為 $3V_{\max}/4$ ，角速度為 $\omega_a = c/r = 3V_{\max}/4r$ ，旋轉的周期為：

$$P_{m=4} = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{8\pi r}{3V_{\max}} \quad (5)$$

由(3)與(5)式周期的計算可以看出，在相同的半徑及最大切向風速條件下，波數 4 的旋轉周期只有波數 2 的 2/3，也就是在賀伯颱風的最大風速與半徑條件下，旋轉周期由 144 分鐘減為 96 分

鐘，此 96 分鐘比 Muramatsu (1986) 觀測的 1 小時為長，但是周期大小也取決於最大風速（或渦度）及颱風結構。由於 Muramatsu (1986) 並沒有給我們如眼的最大風速等關鍵資訊，因此我們沒有辦法對 Muramatsu (1986) 多邊形颱風眼旋轉周期做更深一層定量的比較。

（二）非線性理論

以上為線性之理論，線性架構上位渦擾動場必須不大，若是橢圓眼長短軸差距大時，線性理論不一定適用此大振幅的現象，我們現在考慮一個橢圓眼的一般非線性動力理論，考慮橢圓形如下式：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6)$$

在橢圓內渦度維持定值 ζ ，而在其外渦度便消失。這便是“Kirchhoff 橢圓渦旋”是由 Kirchhoff 發表，細節可見於 Lamb (1932)，其橢圓渦旋範圍會旋轉，而不會改變其形狀，並且其角速度為

$$\omega a' = \zeta \frac{ab}{(a+b)^2} \quad (7)$$

Kirchhoff 橢圓渦旋之旋轉周期為

$$p' = \frac{2\pi}{\omega a} = \frac{2\pi}{\zeta} \frac{(a+b)^2}{ab} \quad (8)$$

假設一個圓形渦流，取其極限，使 $a=b$ 則其結果會和線性理論相同。(8)和(3)式之差距為 $O(\epsilon^2)$ ，而偏心率 $\epsilon=(a-b)/a$ ，也就說 50% 的 ϵ 會產生 12.5% 的周期上的差距。當長軸為 30km，短軸為 20km 時，如賀伯颱風我們可以得到

$$p' = \frac{2\pi}{\zeta} \frac{25}{6} \approx \frac{8\pi}{\zeta} \quad (9)$$

比較(3)與(9)，針對觀測之賀伯颱風大小，線性理論的位渦波和非線性動力理論的 Kirchhoff 橢圓渦旋，均會產生和真實狀態相似的旋轉周期。這周期相當符合於颱風賀伯所觀測到的周期及最大風速。

當然，上述理論中，基本流場是假設為 Rankine Vortex（渦旋內渦度為常數，渦旋外無渦度）。Rankine Vortex 的結構使得不對稱 ($m \neq 0$) 之位渦波，不會被如 Carr and Williams (1989) 討論之對稱化機制而減弱。在颱風賀伯的觀測中並沒有包含飛機觀測，唯一的觀測是由五分山雷達 (WSR-88D) 所得到的。很遺憾的，在這有限的觀測中，並沒有雷達以外更詳細的颱風眼及風場分佈的資料，以致無法有更進一步的分析。在下一節我們討論分析可能影響位渦波理論之不穩定機制。

四、正壓不穩度線性分析

（一）引言

由於颱風之位渦來源來自深對流；Hack and Schubert (1986) 分析了深對流潛熱釋放的效率性，而眼內沒有深對流，所以我們可以期待颱風眼與眼牆附近，位渦的空間分佈可以呈中空之塔狀結構，所以在徑向存在位渦梯度變號的情形，預期會有正壓不穩定，使得位渦在徑向上重新分佈。Schubert et al. (1997) 利用正壓模式更深入的研究位渦的重新分佈過程，發現颱風眼的較小位渦值會逸入眼牆，產生混合作用，此混合作用可以產生眼牆的收縮使颱風進一步增強。

在前述颱風眼旋轉理論中，不管是線性或非線性之公式，皆建立以 Rankine Vortex 結構存

在之強位渦梯度，強調中性位渦波之存在；當颱風發展成熟之後，眼牆有強烈的積雲對流運動，潛熱的釋放使得眼牆附近有較高的位渦值。這樣的積雲對流運動，在颱風中是屬於相當隨機的分佈，然而強烈的切向平均氣流，以及渦度對稱化之過程(Carr and Williams, 1989)，使得位渦的分佈呈現較均勻軸對稱的環狀結構，此對稱化過程的時間尺度可以短於一、二個小時。如果考慮颱風眼中心沒有積雲對流的潛熱釋放，所以颱風眼中心可以有較小的位渦值。而眼牆的環狀位渦結構可以產生正壓不穩定，破壞中性位渦波之存在；爲了進行線性穩度理論分析，所以我們假設理想化初始場位渦分佈(見圖 4)進行穩度分析。

在圖 4 之位渦分佈結構下，高位渦帶的邊緣具有較大的渦度梯度，可以存在著位渦波，也就是廣義的 Rossby Wave，而兩位渦波的交互作用可能會引起正壓不穩定。Kuo and Horng (1994) 以 f 面上雙位渦波之交互作用，以及正壓不穩定解釋梅雨鋒面上成排列狀 MCS (中尺度對流系統) 成立之原因。由於颱風的位渦分佈是環狀的結構，所以討論颱風眼牆位渦波的問題必須在圓柱座標下探討。我們將在圓柱座標且在 f 面假設下 (不考慮 β 效應)，探討正壓不穩定的線性分析理論；而在正壓問題的討論上，位渦與渦度其實是相同的物理量，因此提到的渦度也可代表是位渦值。

(二) 不穩度數學分析

若將渦度分爲基本場和擾動場，則

$$\zeta(\lambda, r, t) = \bar{\zeta}(r) + \zeta'(\lambda, r, t) = \bar{\zeta}(r) + \nabla^2 \psi \quad (10)$$

基本場 $\bar{\zeta}(r)$ 是一對稱的位渦分佈，此軸對稱位渦產生可視爲經由對稱化機制後所得的結果，所以

只爲徑向距離的函數；在圓柱座標下二維的線性非輻散的渦度方程可寫爲

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{V}{r} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \nabla^2 \psi + \frac{d\bar{\zeta}}{dr} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0 \quad (11)$$

其中 ψ 爲流函數； V 爲平均風場； r 爲徑向距離； λ 爲方位角 (切向)； $\bar{\zeta}$ 爲平均渦度。

在這裡擾動場 ($\nabla^2 \psi$) 可以寫成下列圓柱座標型式：

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} \quad (12)$$

且(11)的邊界條件爲在 $r=0$ (颱風眼中心) 及 $r=\infty$ (無窮遠) 時，其流函數爲零 ($\psi=0$)。

在颱風眼中心沒有激烈的積雲對流所產生的潛熱釋放，因此有較小的渦度值；而在眼牆附近則有最大的渦度值；眼牆外側外圍環流，大部份爲層狀雲，所以渦度值最小。在這樣的觀念下，給定初始的基本渦度場 $\bar{\zeta}(r)$ ，可假設分成三個區域： $0 < r < R_1$ (I)，颱風眼； $R_1 < r < R_2$ (II)，眼牆； $R_2 < r < \infty$ (III)，外圍環流； R_1 是颱風眼與眼牆的交界，我們稱爲內半徑； R_2 是眼牆與外圍環流的交界，我們稱爲外半徑，在內外半徑 R_1, R_2 上分別有渦度值的不連續跳躍 (jump)。此外分別在各自的區間內，渦度值隨著徑向沒有變化，也就是說渦度值爲定值，基本渦度場大小分別如下：

$$\bar{\zeta}(r) = \frac{\partial(rV)}{r\partial r} = \begin{cases} (\zeta_0 - \Delta\zeta) & 0 < r < R_1 & \text{(I)} \\ \zeta_0 & R_1 < r < R_2 & \text{(II)} \\ 0 & R_2 < r < \infty & \text{(III)} \end{cases} \quad (13)$$

這樣初始場的假設有兩個重要的原因，一是爲了讓渦度方程式方便求得解析解，二是這樣的渦度

分佈相當接近於真實颱風眼附近的渦度結構。這樣的渦度初始條件，同時也隱含了渦度值在各自的區間內，隨徑向沒有變化。(13)式中 ζ_0 ， $\Delta\zeta$ ， R_1 ， R_2 均為常數，表示在區間內「渦度梯度」均為零值。而在內外半徑上 R_1 ， R_2 兩點渦度，是不連續的。圖4為(13) $\bar{\zeta}(r)$ 之分佈。在一個發展較成熟之颱風，我們可以期待 $\Delta\zeta/\zeta_0$ 的值不會太大。Schubert et al. (1997)之數值實驗顯示在經過正壓不穩度位渦混合後， $\Delta\zeta$ 可以變成負值，也就是眼內位渦值大於眼牆位渦值。

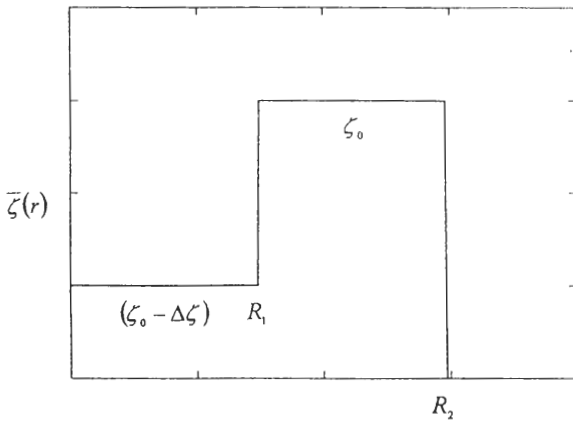


圖4 (13)式的渦旋徑向分佈圖

平均渦度場(13)所對應的平均風場(V)的關係式如下：

$$\bar{\zeta}(r) = \frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} \quad (14)$$

上式為白努利方程之形式，解(14)式得到通解為：

$$V = \frac{r\bar{\zeta}}{2} + \frac{const}{r}$$

因此在三個區域範圍內的風場分別為：

$$V = \frac{1}{2} \begin{cases} r(\zeta_0 - \Delta\zeta) & 0 \leq r \leq R_1 \\ r\zeta_0 - \frac{R_1^2}{r}\Delta\zeta & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \frac{R_2^2}{r}(\zeta_0 - \delta^2\Delta\zeta) & R_2 \leq r \leq \infty \end{cases} \quad (15)$$

(15)式中 $\delta \equiv R_1/R_2$ ，($0 \leq \delta \leq 1$)，表示內、外圈半徑的比值。

由(15)式中在 R_1 ， R_2 二點的風場必需是連續，分別定義在 R_1 ， R_2 二點的風場為 V_1 ， V_2 ，可以得到 V_1 ， V_2 ：

$$V_1 = V(R_1) = \frac{R_1}{2}[\zeta_0 - \Delta\zeta] \quad (16)$$

$$V_2 = V(R_2) = \frac{R_2}{2}[\zeta_0 - \delta^2\Delta\zeta] \quad (17)$$

令 ψ 解是以波動形式存在，如下：

$$\psi(\lambda, r, t) = \Psi(r)e^{i(m\lambda - \sigma t)} \quad (18)$$

其中 m 為波數， σ 是頻率。

渦度擾動場將(12)之 $\nabla^2\psi$ 及(18)式之 $\psi(\lambda, r, t)$ 以及邊界條件代入渦度方程(10)，可以得到渦度方程的頻散關係式：

$$\left(\frac{V}{r} - \frac{\sigma}{m}\right)\left(\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Psi}{dr} - \frac{m^2}{r^2}\right) - \frac{1}{r}\frac{d\bar{\zeta}}{dr}\Psi = 0 \quad (19)$$

利用(13)式基本場渦度之分佈，在各自的區間內（除了 R_1 ， R_2 兩點以外），渦度梯度均為零值（ $d\bar{\zeta}/dr = 0$ ）代入渦度頻散關係式(19)式得到：

$$\left(\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Psi}{dr} - \frac{m^2}{r^2}\right) = 0 \quad (20)$$

(20) 為一個二階線性微分方程式, 其解可以在 $\Psi = r^m$, $\Psi = r^{-m}$ 形式加上複氏級數兩共軛複數組合而成, 在有限邊界條件下, 三個區域的一般解分別為:

$$\Psi(r) = \begin{cases} A r^m & 0 \leq r \leq R_1 \quad \text{(I)} \\ B r^m + D r^{-m} & R_1 \leq r \leq R_2 \quad \text{(II)} \\ E r^{-m} & R_2 \leq r \leq \infty \quad \text{(III)} \end{cases} \quad (21)$$

因為在 $0 < r < R_1$ 區間, r^{-m} 會發散; 而在 $R_2 < r < \infty$ 區間, r^m 也會發散, 所以我們必須略去這兩個部份。

(21) 式中, A, B, D, E 為獨立的四個常數(未知數), 自由度為四。然而因為在 R_1, R_2 二點的流函數解必需是連續的, 所以 A, B, D, E 必需符合下列二關係式:

$$A = B + D R_1^{-2m} \quad (22)$$

$$E = B R_2^{-2m} + D \quad (23)$$

多了這兩個關係式, 所以(21)式的自由度減為二(剩下二個獨立變數)。

$$\left(\frac{V_1 m}{R_1} - \sigma \right) \left[m (B R_1^{m-1} - D R_1^{-m-1}) - m A R_1^{m-1} \right] - \frac{m}{R_1} \Delta \zeta A R_1^m = 0 \quad (26)$$

$$\left(\frac{V_2 m}{R_2} - \sigma \right) \left[-m E R_2^{-m-1} - m (B R_2^{m-1} - D R_2^{-m-1}) \right] + \frac{m}{R_2} \zeta_0 E R_2^m = 0 \quad (27)$$

將(22,23) A, B, D, E 的關係式代入(26,27)兩式, 以 B, D 取代 A, E 使得方程組變成完整的封閉方程組:

$$\left(\frac{V_1 m}{R_1} - \sigma \right) (-2 D R_1^{-2m}) - \Delta \zeta (B + D R_1^{-2m}) = 0 \quad (28)$$

因為在 R_1, R_2 二點上風場必須連續, 所以在 $R_1 - \varepsilon < r < R_1 + \varepsilon$, $R_2 - \varepsilon < r < R_2 + \varepsilon$ 區間 ($\varepsilon \rightarrow 0$ 的正數), 也就是在 R_1, R_2 二點附近很小的區間, 積分過度的頻散關係式(19)式, 分別得到:

(1) 在 $R_1 - \varepsilon < r < R_1 + \varepsilon$ 區間 ($\varepsilon \rightarrow 0$ 的正數)

$$\int_{R_1-\varepsilon}^{R_1+\varepsilon} \left\{ \left(\frac{V}{r} - \frac{\sigma}{m} \right) \left(\frac{d^2 \Psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \frac{d\zeta}{dr} \Psi(r) \right\} dr = 0$$

$$\left(\frac{V_1}{R_1} - \frac{\sigma}{m} \right) \left[\left(\frac{d\Psi}{dr} \right)_{R_1+\varepsilon} - \left(\frac{d\Psi}{dr} \right)_{R_1-\varepsilon} \right] - \frac{\Delta \zeta}{R_1} \Psi(R_1) = 0 \quad (24)$$

(2) 在 $R_2 - \varepsilon < r < R_2 + \varepsilon$ 區間 ($\varepsilon \rightarrow 0$ 的正數)

$$\int_{R_2-\varepsilon}^{R_2+\varepsilon} \left\{ \left(\frac{V}{r} - \frac{\sigma}{m} \right) \left(\frac{d^2 \Psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \frac{d\zeta}{dr} \Psi(r) \right\} dr = 0$$

$$\left(\frac{V_2}{R_2} - \frac{\sigma}{m} \right) \left[\left(\frac{d\Psi}{dr} \right)_{R_2+\varepsilon} - \left(\frac{d\Psi}{dr} \right)_{R_2-\varepsilon} \right] - \frac{\zeta_0}{R_2} \Psi(R_2) = 0 \quad (25)$$

三個不同的區域, 流函數(21)徑向的變化 ($\frac{d\Psi}{dr}$) 代入(24,25)得到:

$$\left(\frac{V_2 m}{R_2} - \sigma \right) (-2 B R_2^{-2m}) - \zeta_0 (B R_2^{-2m} + D) = 0 \quad (29)$$

假設

$$\sigma_1 = \frac{m V_1}{R_1}, \quad \sigma_2 = \frac{m V_2}{R_2} \quad (30)$$

分別表示在 R_1 , R_2 基本流場的頻率, 代入(28,29)式, 並整理成矩陣形式:

$$\begin{bmatrix} -\Delta\zeta & [2(\sigma_1 - \sigma) + \Delta\zeta]R_1^{-2m} \\ [-2(\sigma_2 - \sigma) + \zeta_0]R_2^{2m} & \zeta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

若 B 和 D 要有非零解, 則最右項判別式須為零, 所以得到控制頻率變化的二元一次方程組:

$$\sigma^2 - \left[\sigma_1 + \sigma_2 + \frac{1}{2}(\Delta\zeta - \zeta_0) \right] \sigma + \left\{ \sigma_1 \sigma_2 + \frac{1}{2}(\sigma_2 \Delta\zeta - \sigma_1 \zeta_0) - \frac{1}{4} \Delta\zeta \zeta_0 (1 - \delta^{2m}) \right\} = 0 \quad (31)$$

解(31)式可得到

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\Delta\zeta - \zeta_0}{4} \pm S^{\frac{1}{2}} \quad (32)$$

$$\text{其中 } S = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} - \frac{\Delta\zeta + \zeta_0}{4} \right)^2 - \frac{\Delta\zeta \zeta_0}{4} \delta^{2m} \quad (33)$$

S 稱為『穩定判別式』, 若 $S < 0$ 時則含有不穩定之存在, 因為 $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ (σ_r 是實數部; σ_i 虛數部), 當 $S < 0$ 時, σ_i 才存在非零值, 波動(ψ)才會成長, 也就是不穩定的情形; 但若 $S > 0$ 時, 頻率 σ 只有實數部, 所以會得到穩定的波動解。

(16,17)在 R_1, R_2 二點上的風速 V_1, V_2 分別代入(30), 寫成($\zeta_0, \Delta\zeta, m$)的函數:

$$\sigma_1 = \frac{mV_1}{R_1} = \frac{m}{2}(\zeta_0 - \Delta\zeta) \quad (34)$$

$$\sigma_2 = \frac{mV_2}{R_2} = \frac{m}{2}(\zeta_0 - \delta^2 \Delta\zeta) \quad (35)$$

(34)式中, σ_1 表示在 R_1 半徑上的頻率; 而(35)式中, σ_2 表示在 R_2 半徑上的頻率。比較(34,35)可以看出 $\sigma_2 \geq \sigma_1$, (因為 $\delta < 1$), 其物理意義表示, 在相同波數(m)的條件下, 外圈 R_2 上波

動頻率大於在 R_1 上的頻率, 在相同波數條件下, 也可以說在 R_2 半徑上的波速較快。而這樣的位渦波都是向著平均風的上游, 因此波動將會比平均氣流的轉動的速度還慢, 因此外圈轉動速度的減慢也會較多, 所以內圈反鐘向轉速度比外圈轉動速度較快一些。

(34,35)代入(32,33), 使頻率以及穩定判別式改寫成下列形式:

$$\sigma = \frac{m}{4} [2\zeta_0 - (1 + \delta^2)\Delta\zeta] + \frac{\Delta\zeta - \zeta_0}{4} \pm S^{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

$$S = \frac{\zeta_0^2}{4} \left\{ \left(\frac{1}{4} \right) [(m - m\delta^2 - 1)\gamma - 1]^2 - \gamma\delta^{2m} \right\} \quad (37)$$

式中 $\delta \equiv R_1/R_2$, ($0 \leq \delta \leq 1$) ; $\gamma \equiv \Delta\zeta/\zeta_0$, ($0 \leq \gamma \leq 1$) 表示渦度的比值, γ 欲接近 1 表示內圈渦度跳躍值(jump)愈大, 也可說眼牆內側渦度梯度愈大。在發生正壓不穩定及位渦水平向颱風眼中心的混合時(Schubert et al. 1997), 我們可以預期值會變小(甚至 $\gamma < 0$)。或者我們可以期待在一個發展較成熟的颱風, γ 值不會太大。

(三) 物理詮釋

最後我們利用頻散關係式(36)與穩定判別式(37), 討論在不同的波數(m)的正壓穩度。我

們分成穩定解與不穩定解來討論：

(1.) 穩定解：

a. 波數為 1 ($m=1$)，代入(36)得到：

$$S = \frac{1}{16}(\delta^2 \Delta \zeta - \zeta_0)^2 > 0$$

則 $S > 0$ 得到的是穩定的波動解，所以波數為 1 的時候一定是穩定的，不論渦度值是如何分佈。

b. 波數為 2 ($m=2$)，代入(36)得到：

$$S = \frac{1}{16}[(\zeta_0 - \Delta \zeta)^2 + 4\delta^2 \Delta \zeta (\zeta_0 - \Delta \zeta)(1 - \delta^2)] > 0$$

因為 $1 - \delta^2 > 0$ 且 $\zeta_0 - \Delta \zeta > 0$ ，所以 $S > 0$ ，波數 2 一樣是穩定的波動解。

c. 若 $\Delta \zeta = 0$ 或是 $\delta^2 \rightarrow 0$ 代入(36)式中得到：

$S > 0$ ，也是穩定的波動解。同樣 $m = 2$ 也是恆為穩定的。

$\Delta \zeta = 0$ 或 $\delta \rightarrow 0$ 物理意義均表示渦度梯度在徑向只有一個符號的情形，所以當然是正壓穩定。以 $\Delta \zeta = 0$ 或是 $\delta \rightarrow 0$ 代入(36)得到：

$$\sigma = \frac{\zeta_0}{4}(2m - 1 \pm 1)$$

取負根可得， $\sigma = \frac{\zeta_0}{2}(m - 1)$

$$\text{或 } \frac{\sigma}{m} = \frac{\zeta_0}{2} \left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

上式為頻率(σ)與波數(m)間的頻散關係

式，在這裡 σ/m 和(4)，(7)的 ω_0 及 ω_0' 是相同意義的。在最大渦度值一定的假設下，愈大的波數對應愈高的波速。這與 Lamb (1932) 和 Guinn and Schubert (1993) 所導出的位渦波速(C)、平均風場最大風速($V_{\max}$)與波數(m)的關係式

$$c = R_2 \frac{\sigma}{m} = V_{\max} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \quad (38)$$

是相同的。在這樣的渦度分佈下，可以由渦度值導出 $m=2$ 的最大平均風速 $V_{\max} = R_2 \zeta_0 / 2$ 。

(2.) 不穩定波動解：

由穩定判別式(32)，要產生正壓不穩定的必要條件為 $\zeta_0 > 0$ 且 $\Delta \zeta > 0$ ($\Delta \zeta < 0$ 沒有不穩定)，也就是說在有限區間內，一個 r 的方向渦度梯度有二個符號，或者是說渦度梯度在徑向有變號的情形。這與直角坐標系下，要產生正壓不穩定的必要條件是相同。也就是兩個分處環狀位渦區內、外側的波動，其交互作用引起的不穩定，此正壓不穩定可以產生位渦之水平混合 (Schubert et al. 1997)。

當 $S \geq 0$ 表示是穩定的波動解，若 $S < 0$ 表示正壓不穩定，波動會成長；穩定判別式負的值愈大，則成長愈快速。在不穩定的情形下($S < 0$)，若 R_1, R_2 間最大渦度值(ζ_0)愈大，則渦度梯度愈大，波動成長率當然也愈大。

固定最大渦度梯度(ζ_0)討論不同波數，具有不同的成長率，所以無因次化穩定判別式(S')，得到

$$S' = \frac{4S}{\zeta_0^2} = \left\{ \left(\frac{1}{4} \right) [(m - m\delta^2 - 1)\gamma - 1]^2 - \gamma\delta^{2m} \right\} \quad (39)$$

計算無因次化穩定判別式(S')的大小，則可決定不穩度的大小。當 $S' \geq 0$ 表示穩定，如前述(1.)所討論的穩定波動解；若

$S' < 0$ 表示不穩定，圖 5 為波數 3,4,5,6,7,8 波數的正壓不穩度成長率 $\sqrt{|S'|}$ (以 $\zeta_0/2$ 無因次化)。

圖 5 的橫軸為 $\gamma \equiv \Delta\zeta/\zeta_0$ (由左到右 0.0 到 1.0)，代表中心及眼牆渦度的差值與眼牆

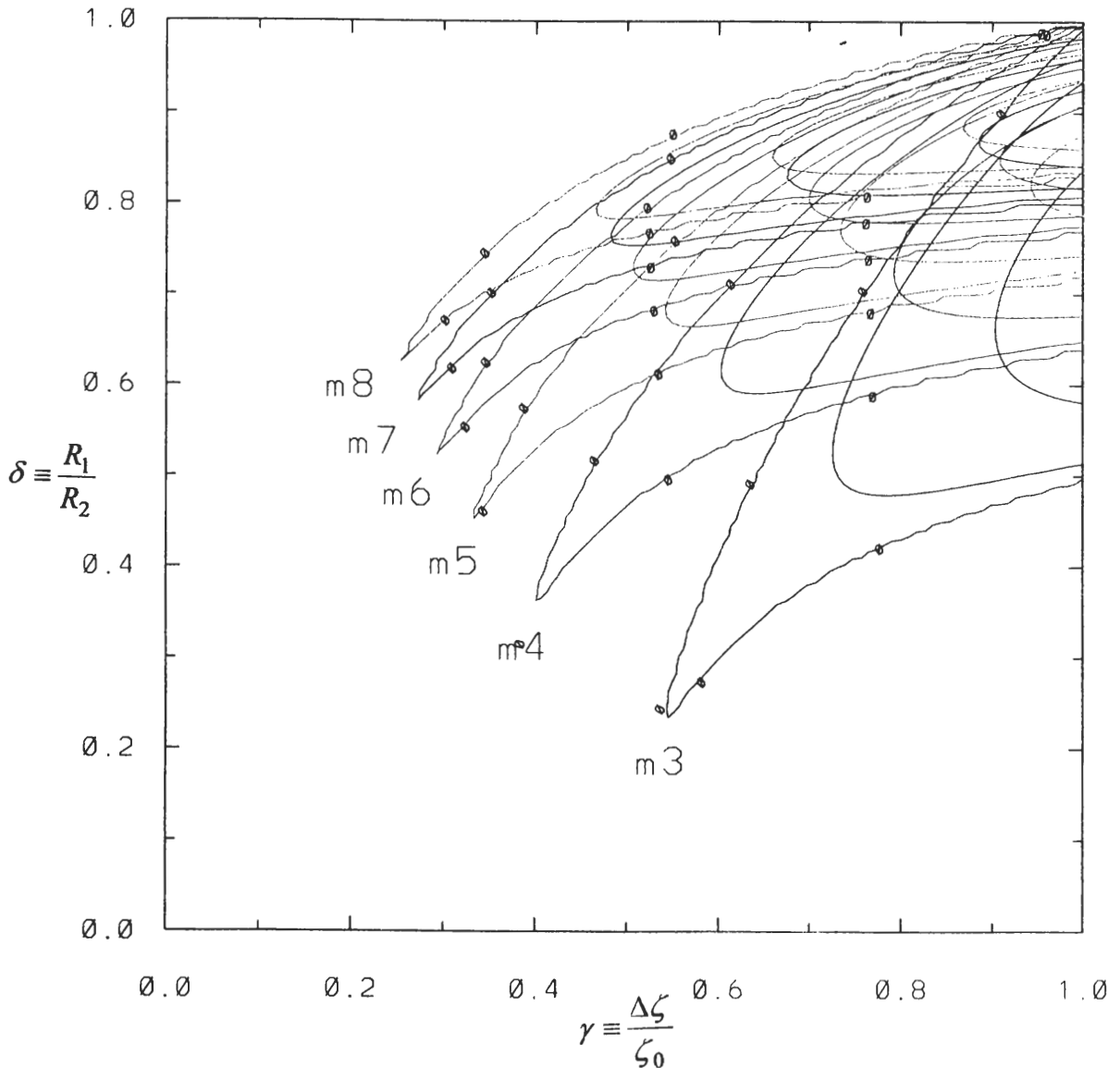


圖 5 (39)的不同波數的正壓不穩度，橫軸為 $\gamma \equiv \zeta_0/\Delta\zeta$ ，縱軸為 $\delta \equiv R_1/R_2$ ；曲線為無因次成長率 (以 $\zeta_0/2$ 標準化)；各波長的不穩度曲線最外圈為零值線，零值線以內各以 0.1 間距向內增加。

渦度的比值，也就是在 R_1 半徑上渦度的跳躍值相對變化量，值愈大表示跳躍值愈大。縱軸， $\delta \equiv R_1/R_2$ （由下到上 0.0 到 1.0），表示半徑的比值，值愈大表示高渦度帶愈窄，或眼牆愈窄。圖 5 曲線為無因次成長率，各波長之不穩定度最外圈為零值線，零值線以內各以 0.1 間距向內增加。

由圖 5，穩度之分析可以看出幾個特性，分別敘述如下：

- a. 高渦度帶太寬 ($\delta < 0.5$ ，眼牆相對於眼厚實)，且 $\gamma < 0.5$ 時，二組位渦波不會有交互作用，因此不會有正壓不穩定。 $\delta = 0$ ($R_1 = 0$) 時渦旋簡化為 Rankine Vortex，颱風眼與眼牆有相同的位渦值渦度梯度只有一個符號，因此也不會有不穩度。反之，高渦度帶較窄 ($\delta > 0.5$) 的情況且 $\gamma < 0.5$ 時，僅有較高波數的波動才會成長，低波數擾動不會成長。
- b. R_1 內半徑渦度的差值 (γ) 愈大，也就是內側渦度梯度愈大，則不穩度也愈大， $\gamma = 1$ ，會有最大成長率。反之渦度梯度愈小，則不穩度愈小。對 $\gamma = 1$ 時， δ 愈大 (愈窄之高渦度區)，則高波數有較大成長率。
- c. 不同的波數有不同的成長率，對較高的波數，渦度跳躍值不需要太大 ($\gamma \geq 0.5$) 即可產生正壓不穩定，但是要發生的不穩定區間會比較窄 ($\delta > 0.5$)，也就是較短的波，二位渦波的距離必須近一點，才會不穩定，但成長率相對的也可以比較大。而在較低的波數時，渦度的跳躍值要大一些 ($\gamma \geq 0.6$) 才會產生正壓不穩定，發生不穩定的區間比較寬，也就是對於較長的波動，二位渦波距離可以遠一

些，但其不穩度是比高波數之成長率較小的。

- d. 考慮 Schubert et al. (1997) 之位渦側向混合過程中，我們可以期待位渦混合後 γ 會變小，因此低波數位渦波一般而言較不易不穩定，而高波數位渦波在較小的 γ 時，需有較大的 δ （較窄之眼牆區）才會不穩定。

- e. 若以無因次成長率 ($\sigma' = \sqrt{|S'|}$) 表示成長的 e-folding 時間尺度，則此時間尺度為 $2/\sigma' \zeta_0$ ，將賀伯颱風之 ζ_0 為 $3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ 代入， $\sigma' = 0.2$ 代表成長時間尺度約為 1 個小時， $\sigma' = 0.1$ 時約 2 個小時。由圖 5 可見正壓不穩度之成長皆可在一、二個小時之內。也就是透過正壓不穩度，渦旋之基本徑向結構可以在一、二個小時內改變，當然位渦波之繞行周期也會受影響。

由以上之分析，我們得知環狀位渦分佈，可以產生不穩定，但以波數 1、波數 2 而言，波動是恆穩定的，所以中性位渦波動可以存在；在有正壓不穩定情形時，我們也可以期待位渦側向混合，有利於低波數位渦波之穩定存在。因為正壓不穩度成長時間和賀伯颱風眼旋轉周期相當，所以不穩度會影響位渦波之運作。此外，位渦波之非線性交作用，則有待於數值模式的探討。

五、總結與討論

我們嘗試以正壓動力理論解釋賀伯颱風之橢圓颱風眼的旋轉。由雷達回波得知 1996 年侵台賀伯颱風的颱風眼為橢圓形，此橢圓颱風眼以 144 分鐘周期反鐘向旋轉。橢圓颱風眼之長軸約

為 30km，短軸約為 20km，而颱風最大風速約為 60m/s，颱風眼旋轉周期明顯大於空氣平流繞行颱風眼之時間（約為 50 分鐘）。由線性與非線性理論得到的結果和觀測之最大風速及周期相當符合，此理論與 Muramatsu (1986)多邊形颱風眼的旋轉周期，隨波數增加周期是遞減的現象也是相符。

由於颱風眼的基本位渦結構，以往的研究指出會受正壓不穩定、渦旋之對稱化及非絕熱效應影響，在我們的位渦波理論及線性不穩度分析中，顯示旋轉周期完全取決於颱風眼之動力結構（如渦度分佈）。若位渦水平混合與非絕熱效應改變基本位渦結構的時間尺度，遠長於本文所探討之旋轉周期的假設情況下，則正壓理論應可以是合理之颱風眼旋轉理論。

Muramatsu (1986)觀測顯示多邊形颱風眼多會發生在發展成熟之颱風；由我們之線性不穩度分析，可以期待在成熟之颱風眼及眼牆渦度差距不會太大（例如 $\gamma < 0.5$ ），在此情形下如果眼牆也相當厚實（ $\delta < 0.5$ ），則正壓不穩度不存在，所以不會影響中性位渦波之運作。此外線性分析也顯示波數 1 和 2 為正壓穩定波。非絕熱效應當然可以改變位渦之徑向基本分佈，此改變是一非線性的過程，但一般颱風強度加強的時間尺度大多是 10 小時以上，我們認為非絕熱效應或許在 144 分鐘的周期內，並不足以顯著改變位渦結構，影響及我們理論的可靠性。從另一個角度而言，則是正壓不穩度之成長時間尺度和旋轉周期相當，可以影響旋轉。Schubert et al. (1997)的理論，認為正壓不穩定帶動位渦向眼中心側向混合，為眼牆收縮及颱風加強之機制，或許一個如賀伯颱風發展成熟之強颱風，正壓不穩度並不重要。Muramatsu (1986)的分析，亦顯示多邊形颱風眼出現在發展良好的颱風眼中。

雖然本文以簡單正壓過程解釋颱風眼之旋轉，我們並不是認為非絕熱過程不重要，我們強調颱風的位渦結構下位渦波之運作，可以使眼旋轉，我們也討論了可能影響位渦波的機制。當然我們沒有回答為何颱風眼會出現適合旋轉 144 分鐘的位渦波動力結構，此點仍有待更多之研究。未來我們將進行正壓數值模擬，乃至於結合雷達、衛星資料之斜壓數值模擬，以進一步探索此旋轉現象，並希望我們之研究可以讓我們更了解颱風眼牆動力。

誌 謝

感謝周仲島教授及張保亮先生，提供的雷達照片。本文由國科會計劃編號 NSC 87-2621-P-002-054，NSC 87-2111-M-002-005-API 支持下完成。

參考文獻

- Carr, L. E. III, and R. T. Williams, 1989: Barotropic vortex stability to perturbations from axisymmetry, *J. Atmos. Sci.*, **46**, 3177-3191.
- Guinn, T., and W. Schubert, 1993: Hurricane spiral bands, *J. Atmos. Sci.*, **50**, 3380-3404.
- Hack, J. J., and W. H. Schubert, 1986: Nonlinear response of atmospheric vortices to heating by organizing cumulus convection, *J. Atmos. Sci.*, **43**, 1559-1573.
- Jou, B. J.-D., P.-L. Chang, and C.-S. Lee, 1997: Dual-Doppler analysis of a landfall typhoon rainband. Preprints. 22nd Conf. on Hurr and Trop. Meteorol., 677-678.
- Kuo, H.-C. and C.-H. Horng, 1994: A study of finite amplitude barotropic instability, *TAO*, **5**, 199-243.

- Kurihara, Y., 1976: On the development of spiral bands in a tropical cyclone. *J. Atmos. Sci.*, **33**, 940-958.
- Lamb, H., 1932: *Hydrodynamics*, sixth ed., *Dover*, 732 pp.
- Lee, W. C., 1997: Structure of Typhoon Herb (1996) observed by WSR-88D in Taiwan. Preprints. 22nd Conf. on Hurr. And Trop. Meteorol., 670-671.
- Lewis, B. M., and H. F. Hawkins, 1982: Polygonal eye wall and rain bands in hurricanes. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **63**, 1294-1300.
- Muramatsu, T., 1986: The structure of polygonal eye of a typhoon. *J. Meteor. Soc. Japan*, **64**, 913-921.
- Schubert, W. H., M. T. Montgomery, R. K. Taft, T. A. Guinn, S. R. Fulton, and J. P. Edwards, 1997: Potential vorticity redistribution, asymmetric eye contraction and polygonal eyewalls in hurricanes. Preprints. 22nd Conf. on Hurr. And Trop. Meteorol., 98-99.
- Thomson, W., 1880: Vibrations of a columnar vortex. *Phil. Mag.*, **10**, 155-168.
- Willoughby, H. E., 1978: A possible mechanism for the formation of hurricane rainbands. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 836-848.

A Possible Mechanism for the Rotation of Typhoon Herb

Hung-Chi Kuo Chung-Hsien Lin Jen-Her Chen Chia-Chun Wu

Department of Atmospheric Science, National Taiwan University

(Manuscript received 28 April 1998 ; in final form 12 October 1998)

ABSTRACT

Linear and non-linear theories are reviewed to investigate the rotation of the ecliptic eye of Typhoon Herb(1996). Both theories emphasize the importance of the neutral potential vorticity (PV) waves. Both linear and non-linear theories yield similar results for the eye rotation. Linear stability analysis was used to estimate the impact of the barotropic instability on the PV waves. We discussed physical mechanisms that might affect the typhoon eye rotation to estimate their influence to the rotation of eyes of typhoon.

Key words : Potential vorticity wave, Barotropic instability