

# 山岳波對粒子沈降的影響

申博文 林能暉

國立中央大學大氣物理研究所

(中華民國八十四年三月二十八日收稿；中華民國八十四年九月十八日定稿)

## 摘 要

在本文的研究中，吾人提出一觀念模式，來探討粒子在山岳波中運動時之動力機制，並驗證 Stout et al.(1993, J. Atmos. Sci., vol 50) 在週期地形下之研究結果。吾人並將地形效應推廣至孤立地形，且可用(a)山岳波垂直速度與粒子終端速度之比值，與(b)山岳波相位斜率和粒子於均勻風場中之運動軌跡斜率之差值，來解釋粒子在山岳波中運動之動力機制。對於數值方法之時間積分，可規範成粒子大小的函數，若超出某範圍，便有數值溢位(overflow)及解分歧(bifurcation)的現象。

關鍵詞：數值溢位、解分歧、終端速度、相位斜率

## 一、前 言

粒子沉降(deposition)的運動軌跡，在不同的領域中，常有不同的應用方式。例如，在空氣污染的研究中，因為必須追蹤粒子的去向，所以軌跡線的計算格外重要。

在無基本風場的環境中，當粒子沉降時，除了受到重力的作用外，尚須考慮空氣阻力(air drag)的影響。當這兩種力平衡時，粒子便以終端速度(terminal velocity)運動。若考慮粒子在均勻風場運動時，則其運動軌跡如圖1所示，與水平風場有固定夾角。

當氣流受到地形作用，會因為後者之水平和垂直尺度的影響，而產生不同的山岳波。若粒子在此山岳波所引發之流場中運動，必然受其波動性所影響。Lin(1991)曾發展一非線性分層氣流模式，來探討山岳波對雲化學反應機制的影響，以了解酸沈降在地形上之分布。Stout et al.(1993)則利用二維線性週期山岳波(sinusoidal mountain waves)之解析解，作為大氣風場，然後計算粒子在風場中受重力及空氣阻力影響的運動軌跡。結果顯示，當山岳波垂直方向為傳播模(propagating mode)時，粒子軌跡呈現較大的波動性，而不同粒子的軌跡線彼此容易密集在一

起，如圖 2.a 及 2.b 所示。該文中，對於風場大小，浮揚頻率，地形尺度，以及粒子粒徑之個別的影响，亦加以分析討論。

本文中吾人將提出一觀念模式，以解釋粒子受傳播模山岳波影响之動力機制，並驗證 Stout et al.(1993)的研究結果，且進一步將地形推廣至孤立地形(isolated mountain)。再者，將探討粒子運動方程式在求解時，所選用之數值方法之時間積分的規範，以避免發生數值溢位(overflow)或解分歧(bifurcation)現象。以下第二及第三章中，吾人將介紹粒子運動及山岳波的動力方程。第四章則建立一觀念模式，以探討粒子在山岳波中運動之動力機制。第五章則討論若利用數值模式求粒子運動軌跡時，規範數值方法中所選取之積分時間。第六章則討論週期山與孤立山所引發之山岳波對粒子運動的影响。最後，將本文做一總結。

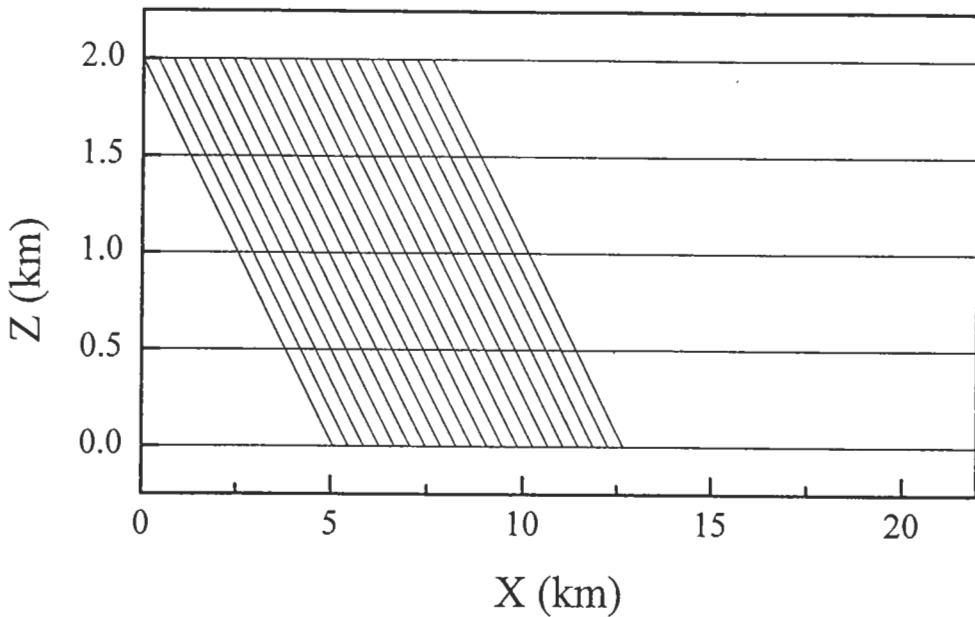


圖 1 將 20 個粒子於 2 公里處等間距釋放，結果顯示粒子在均勻風場中運動時，其軌跡線與水平風場有固定夾角(After Stout et al.,1993)。

## 二、粒子運動之動力描述

粒子在大氣中運動時，會同時受到空氣阻力和重力的影响。粒子所受之重力為

$$F_g = \frac{\pi D^3}{6} g(\rho - \rho_p) \quad (1.a)$$

而空氣阻力用數學式子可以表示為

$$F_x = \frac{1}{2} \rho C_d A V_{rel} \left( u - \frac{dX}{dt} \right) \quad (1.b)$$

$$F_z = \frac{1}{2} \rho C_d A V_{rel} \left( w - \frac{dZ}{dt} \right) \quad (1.c)$$

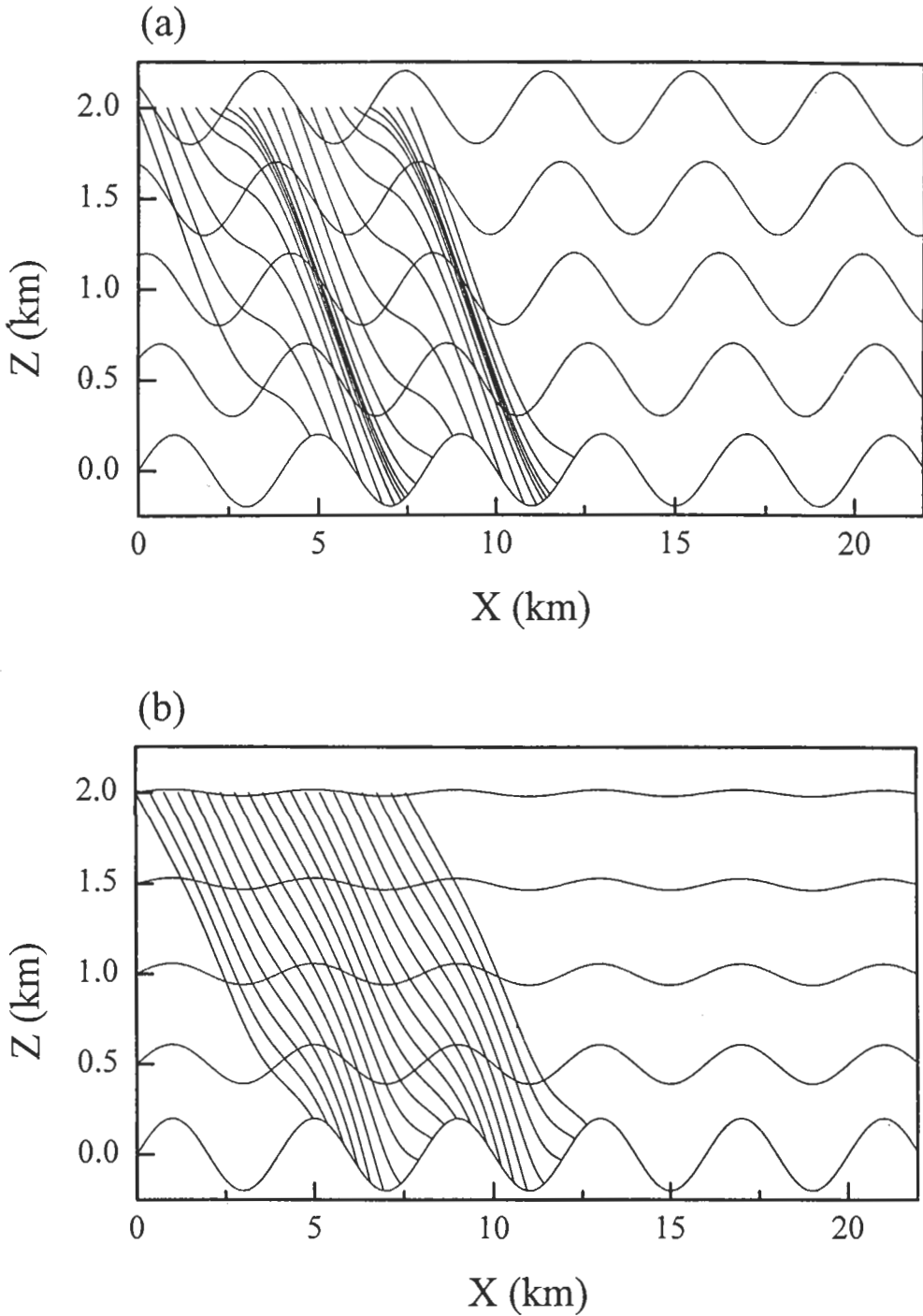


圖2 將20個粒子於2公里處等間距釋放，計算粒子在線性週期山岳波中之運動軌跡。(a)山岳波垂直方向為傳播模(propagating mode)，粒子軌跡呈現較大的波動性，而不同粒子的軌跡線彼此容易密集在一起。(b)山岳波為侷限模，不同粒子的軌跡線較不容易密集在一起(After Stout et al.,1993)。

其中  $(X, Z)$  為粒子的位置,  $(u, w)$  為大氣風場在  $(x, z)$  方向的速度,  $\rho$ 、 $\rho_p$  分別是大氣與粒子的密度,  $D$  是粒子的直徑,  $C_d$  是拖曳力係數 (drag coefficient),  $A$  是粒子的截面積, 而

$$V_{rel} = \sqrt{\left(u - \frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(w - \frac{dZ}{dt}\right)^2} \quad (1.d)$$

代表粒子相對大氣風場的速度。

(1.b) 及 (1.c) 式表示阻力的作用, 是要使粒子的速度趨近風場, 當粒子速度等於風場時, 則粒子不再受到阻力作用。  $C_d$  是雷諾數  $R_e$  (Reynold number) 的函數, 即  $C_d = f(R_e)$ 。而雷諾數

$$R_e = \frac{\rho V_{rel} D}{\mu} \quad (1.e)$$

$\mu$  是動力黏滯係數 (dynamic viscosity coefficient)。為了簡化問題, 假設雷諾數很小, 因此  $C_d \approx \frac{24}{R_e}$ , 此稱之為斯特克線性近似 (Stoke's Linear Approximation)。但當雷諾數很大時, 斯特克線性近似不再成立, 此時  $C_d \approx$  常數 (如 Fowel, 1986)。至於不同的雷諾數, 其所對應之拖曳力係數, 以 Morsi and Alexander (1972) 整理得最完整, 他們將拖曳力係數寫成,  $C_d = A + \frac{B}{R_e} + \frac{C}{R_e^2}$ , 然後以分段 curve fitting 的方式去計算  $A$ 、 $B$  和  $C$ , 其結果如表一所示。

表一 不同的雷諾數, 其所對應之拖曳力係數。將拖曳力係數寫成,  $C_d = A + \frac{B}{R_e} + \frac{C}{R_e^2}$ , 然後以分段 curve fitting 的方式去計算  $A$ 、 $B$  和  $C$  (摘自 Morsi and Alexander, 1972)。

$C_d = 24/R_e$	$R_e < 0.1$
$C_d = 22.73/R_e + 0.0903/R_e^2 + 3.69$	$0.1 < R_e < 1$
$C_d = 29.166/R_e - 3.8889/R_e^2 + 1.222$	$1 < R_e < 10$
$C_d = 46.5/R_e - 116.67/R_e^2 + 0.6167$	$10 < R_e < 100$
$C_d = 98.33/R_e - 2778.0/R_e^2 + 0.3644$	$100 < R_e < 1000$
$C_d = 148.62/R_e - 47500.0/R_e^2 + 0.357$	$1000 < R_e < 5000$
$C_d = -490.546/R_e + 578700/R_e^2 + 0.46$	$5000 < R_e < 10000$
$C_d = -1662.6/R_e + 5416700/R_e^2 + 0.519$	$10000 < R_e < 50000$

由 (1.a)、(1.b) 及 (1.c) 式, 粒子的運動方程可以進一步寫成

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_p} \frac{C_d}{D} V_{rel} \left(u - \frac{dX}{dt}\right) \quad (2.a)$$

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = g \frac{\rho - \rho_p}{\rho_p} + \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_p} \frac{C_d}{D} V_{rel} \left(w - \frac{dZ}{dt}\right) \quad (2.b)$$

而上式的積分，可採用 Simple explicit numerical method，即

$$X^{n+1} = X^n + \left(\frac{dX}{dt}\right)^n \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2X}{dt^2}\right)^n \Delta t^2 \quad (2.c)$$

$$Z^{n+1} = Z^n + \left(\frac{dZ}{dt}\right)^n \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2Z}{dt^2}\right)^n \Delta t^2 \quad (2.d)$$

其中

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^{n+1} = \left(\frac{dX}{dt}\right)^n + \left(\frac{d^2X}{dt^2}\right)^n \Delta t \quad (2.e)$$

$$\left(\frac{dZ}{dt}\right)^{n+1} = \left(\frac{dZ}{dt}\right)^n + \left(\frac{d^2Z}{dt^2}\right)^n \Delta t \quad (2.f)$$

吾人可給定粒子之初始位置及初始速度，由(2.a)及(2.b)式計算粒子的加速度  $\frac{d^2X}{dt^2}$  及  $\frac{d^2Z}{dt^2}$ 。然後利用(2.c)及(2.d)式計算下一時刻的位置，並且用(2.e)及(2.f)計算下一時間的速度。重複以上步驟，可以求得粒子的運動路徑。以上方程式中， $u$ 、 $w$  可以是山岳波之水平及垂直速度，因此吾人可藉以討論粒子運動軌跡受到山岳波影響的程度。

### 三、山岳波之模式與理論

本節中，吾人將同時探討週期地形與孤立地形所造成之線性山岳波。有關二維地形造成的山岳波，Queny(1948)是經典之作，而Smith(1979)則有廣泛的整理與討論。若考慮大氣在  $x-z$  方向的運動，其控制方程為：

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad x \text{ 方向的運動方程} \quad (3.a)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad z \text{ 方向的運動方程} \quad (3.b)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v}, \quad \text{連續方程} \quad (3.c)$$

$$\frac{dp}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt}, \quad c^2 = \gamma RT, \quad \text{熱力方程} \quad (3.d)$$

其中  $(u, w)$  為大氣風場在  $(x, z)$  方向的速度， $p$  是大氣壓力， $c$  是聲速， $\gamma$  是定壓比熱和定容比熱係數之比值， $T$  是大氣溫度。假設流體達到穩定狀態 (steady state)，且基本風場是均勻的，吾人令  $\eta$  為流函數 (亦代表等密度面的垂直位移)， $U$  為均勻風場， $u'$ 、 $w'$  為風場擾動，且  $u = U + u'$ ， $w = w'$ ， $N$  為浮揚頻率，將方程式線性化，並經由布氏近似 (Boussinesq approximation)，方程組可以簡化為單一變數的方程式，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{N^2}{U^2}\right)\eta = 0 \quad (4.a)$$

而由連續方程吾人可知

$$u' = -U \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad w' = U \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4.b)$$

因為求解過程中，曾將方程式做線性化處理，因此所得之解稱為線性山岳波。為方便以下討論，我們定義以下變數， $l$  為 Scorer's parameter ( $= \frac{N}{U}$ )， $h_m$ 、 $a$  為地形之山頂高度與水平尺度， $k$  為地形波數 ( $= \frac{2\pi}{a}$ )。考慮上邊界為輻射條件 (radiation condition)，(4.a) 及 (4.b) 式的解，受不同地形影響的結果如以下各節次所討論。

### (一) 週期山引發之山岳波

當地形為週期山時，可令地形  $h = h_m \sin(kx)$ ，當  $l^2 > k^2$ ，其流函數及風場擾動的解為，

$$\eta = h_m \sin(kx + \sqrt{l^2 - k^2}z) \quad (5.a)$$

$$\frac{u'}{U} = -\frac{\partial \eta}{\partial z} = -\sqrt{l^2 - k^2} h_m \cos(kx + \sqrt{l^2 - k^2}z) \quad (5.b)$$

$$\frac{w'}{U} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = k h_m \cos(kx + \sqrt{l^2 - k^2}z) \quad (5.c)$$

而由 (5.a) 式中，吾人可知流函數相位為  $kx + \sqrt{l^2 - k^2}z$ ，因此

$$\text{流函數等相位可以表示為} \quad z = -\frac{k}{\sqrt{l^2 - k^2}}x \quad (5.d)$$

此解在垂直方向為傳播模 (propagating mode)。

### (二) 孤立山引發之山岳波

當地形為孤立山時，吾人選取地形  $h = h_m \frac{a^2}{(a^2 + x^2)}$ ，則規範引發之山岳波之條件受  $al$  所控制，結果如下：

(a) 當  $al \gg 1$ ，此時山岳波為靜力傳播模，其解為

$$\eta = \left(\frac{\rho_o}{\rho(z)}\right)^{\frac{1}{2}} h_m a \frac{a \cos(lz) - x \sin(lz)}{a^2 + x^2} \quad (6.a)$$

$$\frac{u'}{U} = -\frac{\partial \eta}{\partial z} = \left(\frac{\rho_o}{\rho(z)}\right)^{\frac{1}{2}} h_m a \frac{a \sin(lz) + l x \cos(lz)}{(a^2 + x^2)} \quad (6.b)$$

$$\frac{w'}{U} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(\frac{\rho_o}{\rho(z)}\right)^{\frac{1}{2}} h_m a \left\{ \frac{(x^2 - a^2) \sin(lz) - 2ax \cos(lz)}{(a^2 + x^2)^2} \right\} \quad (6.c)$$

而由 (6.a) 式中，吾人可知流函數相位為  $a \cos(lz) - x \sin(lz)$ ，所以流函數等相位可以表示為

$$z = \frac{U}{N} \cos^{-1} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) \quad (6.d)$$

(b) 當  $al \ll 1$ ，山岳波為侷限模 (trapped mode) 時，其解為

$$\eta = \left(\frac{\rho_o}{\rho(z)}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{h_m a (a + z)}{(a + z)^2 + x^2} \quad (7.a)$$

$$\frac{u'}{U} = -\frac{\partial\eta}{\partial z} = \left(\frac{\rho_o}{\rho(z)}\right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{-ah_m}{(a+z)^2 + x^2} + \frac{2h_m a(a+z)^2}{((a+z)^2 + x^2)^2} \right) \quad (7.b)$$

$$\frac{w'}{U} = \frac{\partial\eta}{\partial x} = \left(\frac{\rho_o}{\rho(z)}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{-2xh_m a(a+z)}{((a+z)^2 + x^2)^2} \quad (7.c)$$

(c) 至於  $al \simeq 1$  時，考慮因素較多，為簡化本研究，不在此討論，可參見 Smith(1979)。

若進一步分析傳播模山岳波，吾人可以了解在週期山或孤立山等不同的地形條件下，均有以下類似的結論：

(i) 傳播模山岳波的存在條件為： $l^2 \gg k^2$  (週期山) 及  $al \gg 1$  (孤立山)，而以上均可表示為  $\frac{U}{aN} \ll 1$ 。同時吾人也可證明上式成立時，山岳波滿足靜力平衡。

(ii) 由 (5.b) 及 (6.b) 式，吾人知道， $\frac{w'_{max}}{U} = O(F_r^{-1})$ ，而  $F_r = (\frac{U}{Nh_m})$  是 Froude number，所以線性理論欲成立，必須滿足  $F_r \gg 1$ 。

(iii) 由 (5.c) 及 (6.c) 式，吾人了解， $\frac{w'_{max}}{U} = O(\frac{h_m}{a})$ ，即地形高寬比決定垂直速度的大小。

(iv) 由 (5.d) 及 (6.d) 式，傳播模山岳波其流函數之相位，有向上及向上游傾斜的現象，而斜率大小可以用  $\frac{U}{aN}$  來估計， $\frac{U}{aN}$  愈大則相位斜率愈大，而且此參數亦可估計山岳波最大垂直擾動及水平擾動之比值，即  $\frac{w'_{max}}{u'_{max}} = O(\frac{U}{aN})$ 。又由 (i)，當大氣為靜力平衡時，山岳波垂直速度將遠小於水平速度。

(v) 由 (i) 和 (ii) 可知，欲同時滿足靜力平衡和線性理論，浮揚頻率  $N$  有上下限，即  $\frac{U}{a} \ll N \ll \frac{U}{h}$ 。

$F_r$  與  $\frac{U}{aN}$  是討論山岳波常用的兩個控制變數，前者代表動能與位能的比值，並且用於估計非線性的強弱；而後者則為浮力週期與平流週期的比值，用於估計非靜力的程度。

#### 四、粒子受山岳波作用的動力機制之探討

在 Stout et al.(1993) 的研究中，探討週期地形之山岳波對粒子沉降的影響，並且針對不同的風場，地形尺度，浮揚頻率，以及粒徑大小等條件，加以分析研究。

在第三章中，吾人已概括了解山岳波的特性，當控制變數  $\frac{U}{aN}$ 、 $\frac{U}{Nh_m}$  相同時（前者用於估計非靜力之程度，後者用於估計非線性之大小），吾人稱之為動力近似 (dynamic similarity)，然其山岳波的結構仍有差異，因此對粒子運動軌跡的影響是不同的。究竟這些波動究竟是如何影響粒子的運動呢？由 (2.a) 式吾人可知，當空氣阻力及重力達到平衡時，粒子在水平方向的速度，近似山岳波在水平方向的速度，即

$$\frac{dX}{dt} \simeq u = U + u' \quad (8.a)$$

，而垂直方向的運動，則近似波動在垂直方向的速度，加上粒子自由落體的終端速度 ( $W_t$ )，

$$\frac{dZ}{dt} \approx W_t + w' \quad (8.b)$$

因此當山岳波垂直速度遠大於粒子終端速度時， $w' \gg W_t$  (即粒子顆粒小)，粒子的垂直速度近似山岳波垂直速度，所以粒子軌跡的所呈現之波動性強。而當  $w' \ll W_t$ ，粒子軌跡則近似於無地形時的軌跡。

有了以上的認知，以下吾人將提出一觀念模式，以解釋地形作用對粒子沈降的影響。圖3是粒子在週期地形中運動的示意圖。圖中， $L_1$  代表粒子於均勻風場中之軌跡， $L_2$  為粒子受山岳波影響之運動軌跡， $L_3$ 、 $L_4$  及  $L_5$  則代表山岳波之等相位線，分別是波峰、波谷與波峰之所在，並且平行。 $p_1$ 、 $p_2$  分別是  $L_1$  與  $L_3$ 、 $L_4$  之相交點， $p'_1$ 、 $p'_2$  是  $L_1$  與  $L_2$  相交之鄰近兩點。由圖所示，當  $L_1$  和  $L_3$  (或  $L_4$ ) 夾角 ( $\theta$ ) 大時， $\overline{p_1 p_2}$  線段較小。因為  $L_3$ 、 $L_4$  和  $L_5$  分別是波峰、波谷和波峰之所在，所以  $L_3$  和  $L_4$  之間山岳波是下降運動，而  $L_4$  與  $L_5$  之間為上升運動。圖中 +、- 分別代表山岳波垂直速度  $w'$  為向上與向下。

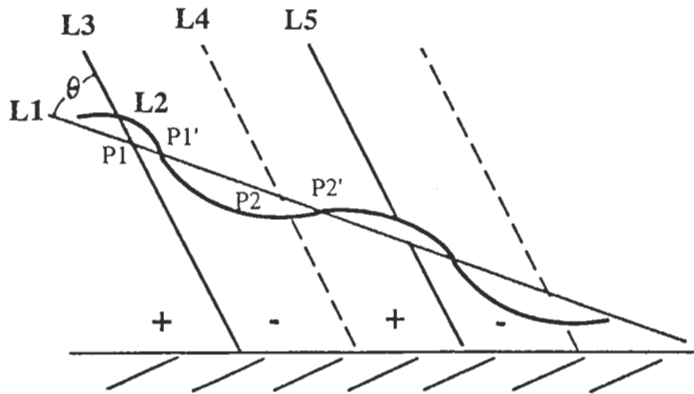


圖3 粒子在週期地形中運動之示意圖。 $L_1$  代表粒子於均勻風場中之軌跡， $L_2$  為粒子受山岳波影響之運動軌跡， $L_3$ 、 $L_4$  則代表山岳波之等相位線，分別是波峰與波谷所在，並且平行。 $p_1$ 、 $p_2$  分別是  $L_1$  與  $L_3$ 、 $L_4$  之相交點， $p'_1$ 、 $p'_2$  是  $L_1$  與  $L_2$  相交之鄰近兩點。圖中 +、- 分別代表山岳波垂直速度  $w'$  為向上與向下。

因為線性山岳波必需滿足  $u' \ll U$ ，即  $F_r \gg 1$ ，所以吾人認為粒子運動軌跡，主要由  $L_1$  所描述，而實際軌跡則受到山岳波的作用而偏離。當山岳波垂直運動為向上時，即  $w' > 0$ ，又  $W_t < 0$  所以由 (8.b) 式吾人可知  $\frac{dZ}{dt} > W_t$ ，而造成  $\frac{dZ}{dt} / \frac{dX}{dt} > \frac{W_t}{U}$ ，其中  $\frac{dZ}{dt} / \frac{dX}{dt}$  是粒子軌跡的斜率， $\frac{W_t}{U}$  是  $L_1$  的斜率，所以粒子運動軌跡之斜率較  $L_1$  之斜率小，因而造成軌跡偏向  $L_1$  的右側 (面向圖的右側)，即有向上的趨勢。同理可得當山岳波垂直速度小於零，即  $w' < 0$  時，軌跡則有向下的趨勢，即偏向  $L_1$  的左側 (面向圖的左側)，因此粒子受山岳波作用的軌跡大致由  $L_2$  所描述。而軌跡所呈現波動之波長  $\overline{p'_1 p'_2}$ ，可由  $L_1$  和等相位線相交點之距離所決定，即  $\overline{p_1 p_2} \approx \overline{p'_1 p'_2}$ 。又如圖所示，若  $|\frac{U}{aN} - \frac{|W_t|}{U}|$  愈大，代表  $L_1$  和  $L_3$  (或  $L_4$ ) 夾角大，所以  $\overline{p_1 p_2}$  線段較小，也就是粒子運動軌跡所呈現之波長較小。至於偏離程度視山岳波垂直速度  $w'$  的大小而定，而當  $\frac{w'}{W_t}$  相同時，代表粒子軌跡之偏離程度相當，但若  $|\frac{U}{aN} - \frac{|W_t|}{U}|$  愈大，代表波長愈小，則相對而言波動性愈大。基於以上之討論，吾人可以推論，粒子運動受週期山岳波影響之控制因子為，



(1)  $\frac{w'}{W_t}$  的比值， $w'$  代表波動性，而  $W_t$  代表粒子性。

(2)  $|\frac{U}{aN} - \frac{|W_t|}{U}|$ ，其中  $\frac{U}{aN}$  是山岳波相位傾斜程度，乃波動性質，而  $\frac{|W_t|}{U}$  為粒子於均勻風場中運動軌跡的斜率。

以上控制因子，若任一值增大，則粒子軌跡所呈現的波動性較大。因為粒子終端速度  $W_t$  與粒子大小  $D$  有關，而山岳波垂直速度的尺度大小近似  $O(\frac{U h_m}{a})$ ，所以當基本風場  $U$  增加，則  $\frac{w'}{W_t}$  變大且  $|\frac{U}{aN} - \frac{|W_t|}{U}|$  亦增加，所以粒子軌跡的波動性大。當地形水平尺度  $a$  增加，因為  $|\frac{U}{aN} - \frac{|W_t|}{U}|$  變小，且山岳波垂直速度  $w'$  亦小，所以粒子軌跡的波動性小。同理當粒子顆粒  $D$  大，則粒子軌跡的波動性小。至於浮揚頻率的影響，似乎只有影響山岳波之相位斜率，當  $N$  大，相位斜率  $\frac{U}{aN}$  小，而  $|\frac{U}{aN} - \frac{|W_t|}{U}|$  小，因此粒子軌跡的波動性小。值得強調的是， $|\frac{U}{aN} - \frac{|W_t|}{U}|$  可以寫成， $\frac{W_t}{U}(\frac{U}{w'}\frac{w'}{W_t} - 1)$ ，其中亦包括  $\frac{w'}{W_t}$ ，即包含山岳波垂直速度和粒子於無基本風場之終端速度之比值。由圖中所示，當  $\frac{|W_t|}{U} > \frac{U}{aN}$  時，吾人可知粒子波動性小，所以吾人焦點在於， $\frac{|W_t|}{U} < \frac{U}{aN}$  的情況。

接著我們來看孤立山的情況，由(6.d)式其靜力山岳波等相位為

$$z = \frac{U}{N} \cos^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right)$$

如圖4表示。圖中， $L_1$  代表粒子於均勻風場中之軌跡， $L_2$ 、 $L_4$  為粒子受山岳波影響之運動軌跡， $L_3$  則代表山岳波之等相位線，為波峰所在。所以  $L_3$  的左側(面向圖的左側)，山岳波是上升運動，而  $L_3$  的另一側，則是下降運動。圖中+、-分別代表山岳波垂直速度  $w'$  為向上與向下。同週期地形之討論，有些粒子在運動過程中受到上升與下降之山岳波的影響，即經歷了  $w'$  正負變化，因此其運動軌跡之斜率先變小再變大，如  $L_2$  所示。而有些粒子行徑的途中，其山岳波垂直速度  $w'$  均為負值，因此軌跡斜率先變大再恢復原先之斜率(因遠離地形時，山岳波的垂直速度很小)，如  $L_4$  所示。由  $L_2$  和  $L_4$ ，我們可以大概看出粒子束有凝聚的現象，而且山岳波之等相位線可以反應粒子束凝聚區的走向，在此區域內，粒子之速度將增大，反之，其速度將減小。當  $L_1$  和  $L_3$  之間的夾角大時，粒子沿  $L_1$  運動時，受到山岳波影響的區域大。至於  $\frac{w'}{W_t}$  扮演的角色和在週期地形時的角色相同。因此吾人知道，粒子運動受孤立山影響之控制因子，和週期山的情況相同。

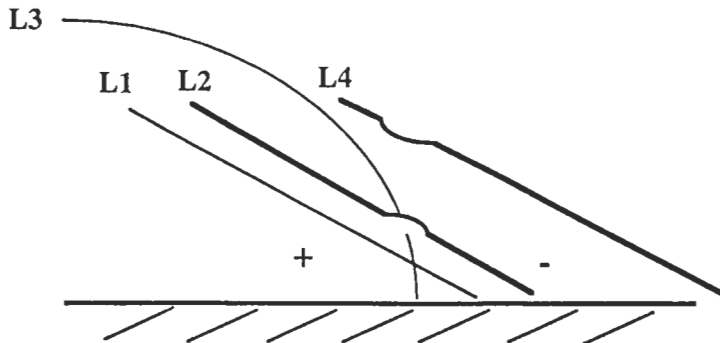


圖4 粒子在孤立地形中運動的示意圖。 $L_1$  代表粒子於均勻風場中之軌跡， $L_2$ 、 $L_4$  為粒子受山岳波影響之運動軌跡， $L_3$  則代表山岳波之等相位線，為波峰所在。圖中+、-分別代表山岳波垂直速度  $w'$  為向上與向下。

## 五、數值模式及限制

Stout et al.(1993)的研究中，並沒有討論時間積分的大小是如何決定的。而在吾人的研究過程中，發現當運動方程化為差分方程式時，不當的選取時間積分間隔，不僅可能會有數值溢位的發生，甚至會有數值解分歧現象。為了避免此一問題，吾人對時間積分間隔之規範的討論如下：

考慮粒子在垂直方向的運動方程，改寫(2.b)式為

$$\frac{dW}{dt} = g\left(\frac{\rho - \rho_p}{\rho_p}\right) + \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_p} \frac{C_d}{D} V_{rel}(w - W) \quad (9)$$

上式中 $W$ 代表粒子的垂直速度， $w$ 則代表風場的垂直速度，以下為方便討論起見，吾人均假設粒子密度大於大氣密度且大氣風場為零，即 $\rho_p \gg \rho$ 且 $w = 0$ ，並將雷諾數分成三種情況加以討論：

(a) 若 $Re \ll 1$ ，則 $C_d \simeq \frac{24}{Re}$ 。所以(9)式可以簡化成

$$\frac{dW}{dt} = -g - \alpha W, \quad \alpha = \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_p} \frac{24\nu}{D^2}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (10.a)$$

其解為

$$W = \frac{-g}{\alpha} + (W_0 + \frac{g}{\alpha})^{-\alpha t} \quad (10.b)$$

當時間趨近無窮大時，其解近似 $\frac{-g}{\alpha}$ ，為定值。若進一步將(10.a)式化成差分方程，

$$W_{n+1} = -g\Delta t + (1 - \alpha\Delta t)W_n \quad (10.c)$$

由於(10.c)式是常係數差分方程式(ordinary difference equation, Bender and Orzag, 1978; Lin, 1985)，其解為

$$W_n = (W_0 + \frac{g}{\alpha})(1 - \alpha\Delta t)^n + \frac{(-g)}{\alpha} \quad \text{見附錄(A)} \quad (11)$$

$W_0$ 是粒子之初始速度，因此若要求差分方程式的解是穩定的(stable)，則 $|1 - \alpha\Delta t| < 1$ 。而此時時間積分 $\Delta t$ 的上限( $\Delta t_c$ )與粒子直徑平方成正比，即

$$\Delta t < \frac{8}{3} \frac{\rho_p}{\rho} \frac{D^2}{24\nu} \quad (12)$$

(b) 若 $Re$ 很大，此時 $C_d \simeq$ 常數 $\simeq 0.46$  (Morsi and Alexander, 1972)，則運動方程為

$$\frac{dW}{dt} = -g + \alpha |W| (-W), \quad \alpha = \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_p} \frac{0.46}{D} \quad (13)$$

上式為非線性微分方程，其解析解(Fowles, 1986)為

$$W = W_t \left( \frac{e^{\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{t}{\tau}}}{e^{\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{t}{\tau}}} \right) \quad \text{見附錄(B)} \quad (14.a)$$

$$W_t = -\sqrt{\frac{g}{\alpha}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{1}{\alpha g}} \quad (14.b)$$

上式中 $\tau$ 是特徵時間， $W_t$ 是粒子於無基本風場時之終端速度，當 $t \rightarrow \infty$ ， $W \rightarrow W_t$ ，表示隨著時間的改變，粒子垂直速度 $W$ 將趨於終端值。

然而若化成差分方程後

$$\frac{W_{n+1} - W_n}{\Delta t} = -g + \alpha |W_n| (-W_n) \quad (15)$$

經由數值計算，其結果如圖5.a所示，圖中橫軸為積分時間，即 $\Delta t$ ，縱軸為經連續20個時間積分後之垂直速度。圖中顯示當 $\Delta t < 0.54$ 秒時，其垂直速度經時間積分後是一定值，此即粒子之終端速度。但當 $\Delta t > 0.54$ 秒時，經時間積分後的垂直速度並非一定值，而是有兩個、四個、八個或多個值，此即解分歧現象(bifurcation)。此外，本圖中 $\Delta t > 0.8$ 秒有反分歧(reverse bifurcation)現象，有關一般反分歧現象之討論可參考John et al. (1983)。而圖5.b為 $\Delta t=0.545$ 秒的結果，橫軸為時間積分次數自80到100，縱軸為垂直速度，由圖中吾人可知，垂直速度隨時間演變有週期性。以下討論吾人定義 $\Delta t_c$ 為出現解分歧現象之臨界值。至於 $\Delta t_c$ 的計算，可以用以下步驟求得。重寫(15)式

$$W_{n+1} = f(W_n), \quad f(W_n) = -g\Delta t + W_n(1 - \alpha\Delta t |W_n|)$$

由解分歧(圖5.b)，垂直速度隨時間之演變有週期性，即

$$W_{m+2} = W_m$$

又因為

$$W_{m+1} = f(W_m), \quad W_{m+2} = f(W_{m+1})$$

所以

$$W_m = f(f(W_m)) \quad (16)$$

利用以上式子，吾人可以求得

$$W_m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\alpha(\frac{2}{\alpha} - g\Delta t^2)}}{2\alpha} \quad \text{見附錄(C)} \quad (17)$$

令

$$\Lambda = -4 + 4\alpha g\Delta t^2 \quad (18)$$

當 $\Lambda < 0$ 時， $W_m$ 沒有實數解。所以沒有解分歧現象發生，而此時

$$(\Delta t)^2 \leq \frac{2.9\rho_p D}{\rho g} \quad (19)$$

上式中，當等號成立時可求得 $\Delta t_c$ ，而其值與粒子直徑之平方根 $\sqrt{D}$ 成正比。

(c)若 $C_d$ 為通式(general case)，如Morsi and Alexander (1972)所述，

$$C_d = A + \frac{B}{Re} + \frac{C}{Re^2} \quad A, B \text{ 和 } C \text{ 可由表一所決定}$$

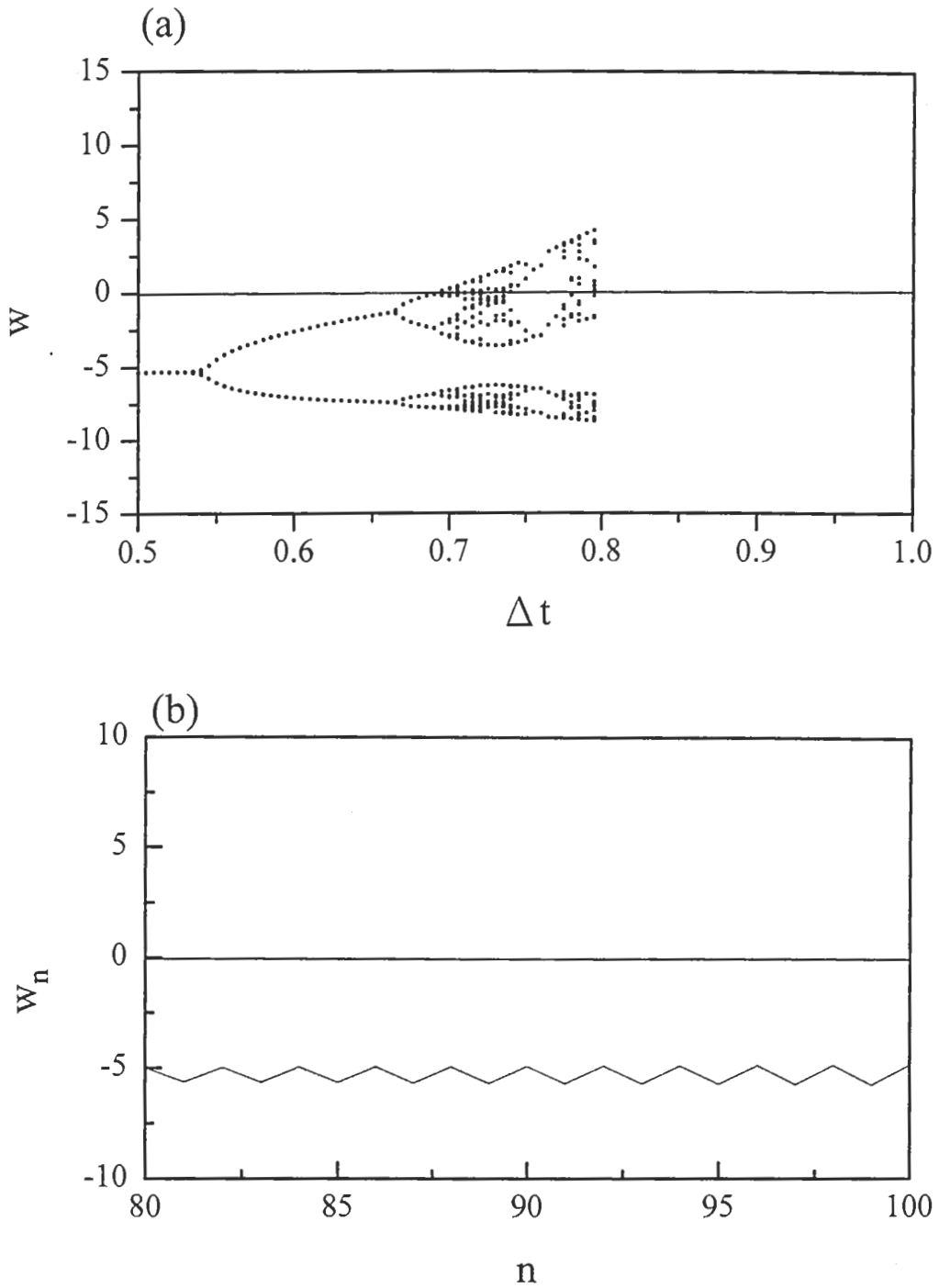


圖5 當  $C_d$  為一常數，積分時間  $\Delta t$  的選取，對數值解的影響。(a)  $0.5 \text{ 秒} < \Delta t < 1.0 \text{ 秒}$  時，所得垂直速度之變化。(b) 當  $\Delta t = 0.545 \text{ 秒}$ ，積分次數與垂直速度之關係。(D=1 mm)

則(13)式爲

$$\frac{dW}{dt} = -g + \alpha W^2 - \beta W + \gamma \quad (20.a)$$

$$\alpha = \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_p} \frac{A}{D}, \quad \beta = \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_p} \frac{\nu B}{D^2}, \quad \gamma = \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_p} \frac{\nu^2 C}{D^3} \quad (20.b)$$

將其化爲差分方程式，經由計算亦有解分歧(圖6.a)的現象。吾人可以求得判別式(見附錄(C))，爲

$$\Lambda = \frac{1}{(\alpha \Delta t)^2} ((2 - \beta \Delta t)^2 - 4(2 - \beta \Delta t) - 4\alpha(\gamma - g)\Delta t^2) \quad (21.a)$$

令 $\Lambda = 0$ ，則可以求得 $\Delta t$ 的上限( $\Delta t_c$ ):

$$\Delta t_c = \sqrt{\frac{4}{\beta^2 - 4\alpha(\gamma - g)}} \quad (21.b)$$

一般而言， $A$ 、 $B$ 和 $C$ 是由 $R_e$ 所決定。而 $R_e$ 又是粒子相對於風場之速度的函數，所以不易估計。假設 $C_d$ 由 $R_{et}$ 所決定( $R_{et}$ 是粒子於終端速度時之 $R_e$ )，即 $R_{et} = \frac{\rho W_t D}{\nu}$ 。則對於不同大小的粒子，由表一和表二，吾人可決定其所對應的 $A$ 、 $B$ 和 $C$ 。當 $C_d$ 決定後，吾人便可以利用(21.b)式來決定 $\Delta t$ 的上限。表三中， $\Delta t_{c1}$ 是由(12)式所決定，而 $\Delta t_{c2}$ 則是由(21.b)式所決定。當實際應用時，吾人得取兩者之最小值(在吾人所選取的粒子範圍中， $\Delta t_{c2}$ 似乎均小於 $\Delta t_{c1}$ )。例如，當 $D = 1mm$ ，由表三及圖6.b， $\Delta t$ 的上限約爲0.56秒。而當我們選取 $\Delta t = 0.5$ 秒重新計算Stout et al.(1993)的個案時(其所用之 $\Delta t = 0.05$ 秒)，結果顯示在相同的條件下，兩者的結果幾乎是一樣的(見圖7.a及圖2.a)。而當 $\Delta t = 0.6$ 秒時，其計算結果會有解分歧現象發生(見圖7.b)，這和實際情況有明顯的差異。

表二 對於不同大小的粒子，其所對應的終端速度以及終端雷諾數， $D$ 是粒子直徑， $R_{et}$ 和 $C_d$ 分別是粒子於終端速度時之 $R_e$ 及 $C_d$ ， $W_t$ 和 $\tau_t$ 則是終端速度及其特徵時間(摘自Gunn and Kinzer, 1949)。

D (mm)	$R_{et}$	$C_d$	$W_t$	$\tau_t$
0.1	1.8	14.8	0.27	0.028
0.2	9.6	4.18	0.72	0.073
0.3	23.4	2.37	1.17	0.119
0.4	43.1	1.65	1.62	0.165
0.5	68.6	1.28	2.06	0.21
0.6	98.7	1.06	2.47	0.252
0.7	133.7	0.92	2.87	0.293
0.8	174.2	0.81	3.27	0.334
0.9	219.9	0.723	3.67	0.375
1.0	268.3	0.666	4.03	0.411
1.2	370.7	0.603	4.64	0.474
1.4	481.9	0.567	5.17	0.528
1.6	601.8	0.542	5.65	0.577
1.8	729.2	0.525	6.09	0.622
2.0	864.1	0.514	6.49	0.662

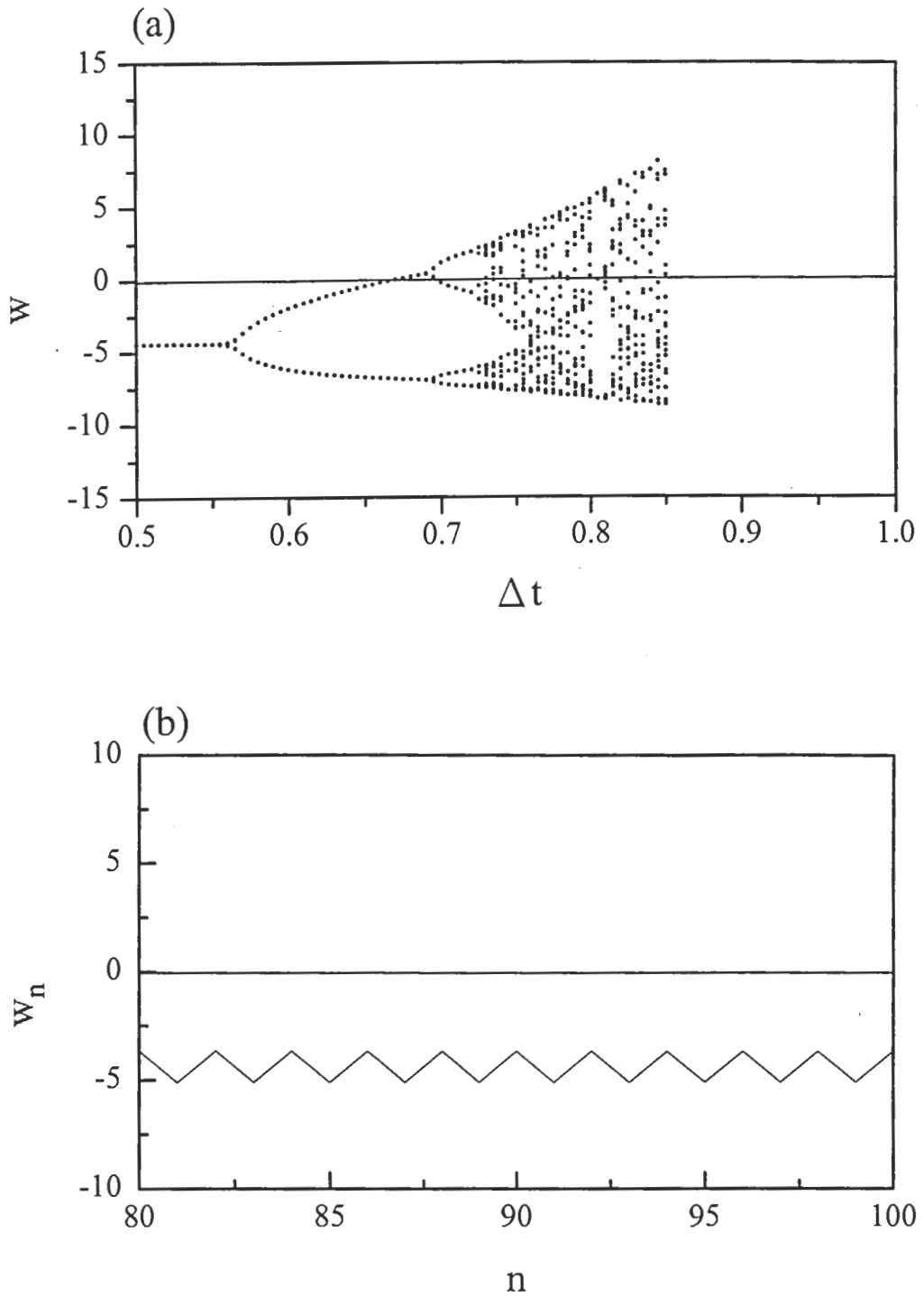


圖6 當  $C_d = A + \frac{B}{R_c} + \frac{C}{R_c^2}$  時，積分時間  $\Delta t$  的選取，對數值解的影響。(a)和 (b)同圖5說明，但(b)中， $\Delta t=0.57$ 秒。(D=1 mm)

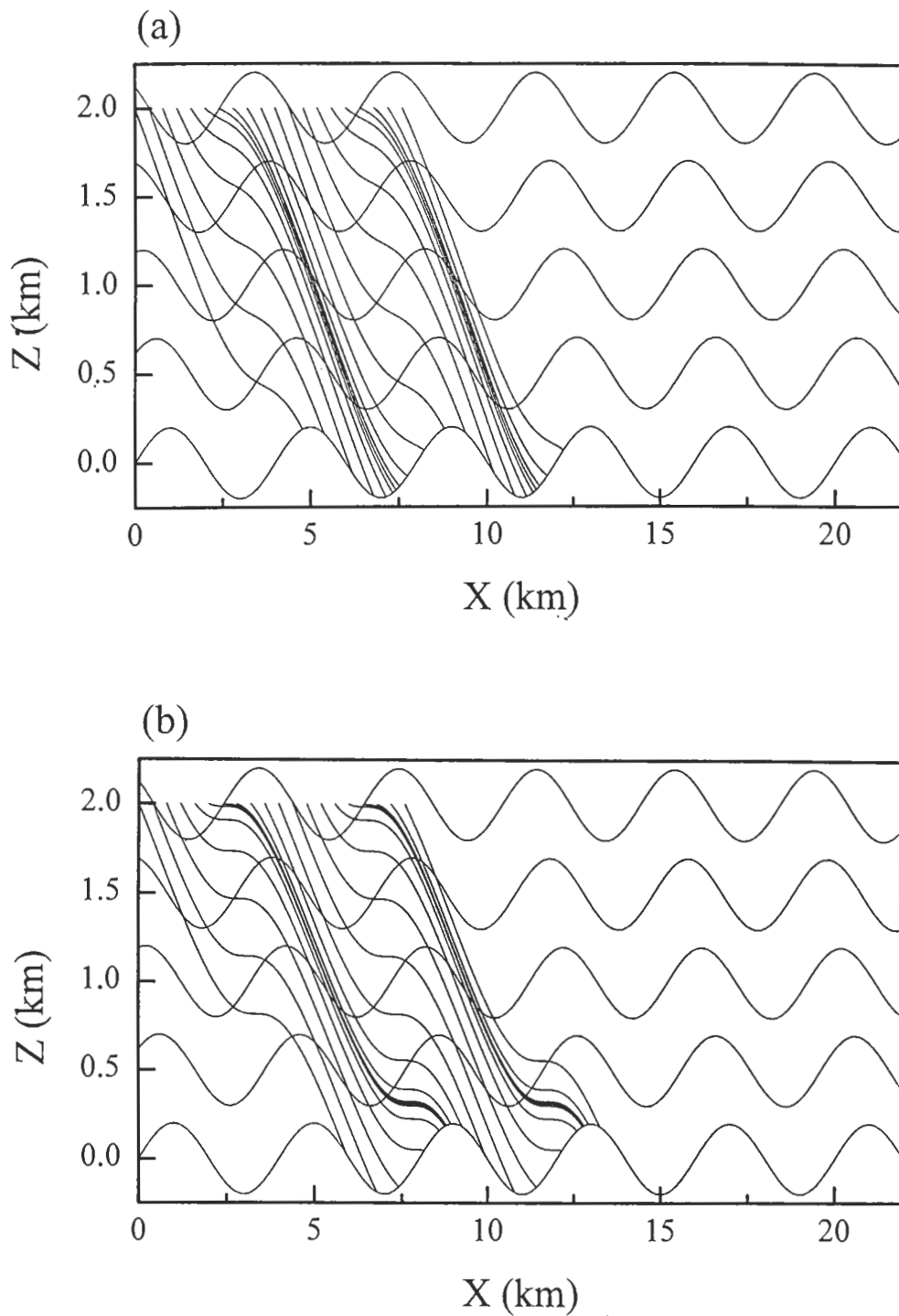


圖7 (a) 選取  $\Delta t = 0.5$  秒時，重新計算 Stout et al. (1993) 的個案 (其所用之  $\Delta t = 0.05$  秒，如圖2)，在相同的條件下，兩者的結果幾乎是一樣的。(b) 當  $\Delta t = 0.6$  秒，其計算結果會有解分歧現象發生。

表三 對於不同大小的粒子，其數值方法之積分時間之上限。 $\Delta t_{c1}$ 是由(12)式所決定，當 $\Delta t < \Delta t_{c1}$ 可以避免數值溢位(overflow)。而 $\Delta t_{c2}$ 則是由(21.b)式所決定，當 $\Delta t < \Delta t_{c2}$ 可以避免數值解分歧。

D(mm)	A	B	C	$\Delta t_{c1}$	$\Delta t_{c2}$
0.1	29.166	-3.8900	1.2220	0.0610	0.0523
0.2	29.166	-3.8900	1.2220	0.2438	0.1269
0.3	46.500	-116.6700	0.6167	0.3440	0.2013
0.4	46.500	-116.6700	0.6167	0.6118	0.2639
0.5	46.500	-116.6700	0.6167	0.9558	0.3115
0.6	46.500	-116.6700	0.6167	1.3764	0.3502
0.7	98.330	-2778.0000	0.3644	0.8860	0.4213
0.8	98.330	-2778.0000	0.3644	1.1572	0.4763
0.9	98.330	-2778.0000	0.3644	1.4644	0.5243
1.0	98.330	-2778.0000	0.3644	1.8080	0.5668
1.2	98.330	-2778.0000	0.3644	2.6034	0.6400
1.4	98.330	-2778.0000	0.3644	3.5436	0.7025
1.6	98.330	-2778.0000	0.3644	4.6284	0.7581
1.8	98.330	-2778.0000	0.3644	5.8578	0.8086
2.0	98.330	-2778.0000	0.3644	7.2318	0.8555

由以上之討論我們知道，利用此數值方法時， $\Delta t$ 的選取相當重要。當粒子小(即 $D$ 小或 $R_e$ 小)時， $\Delta t$ 的上限與 $D^2$ 成正比(如(12)式描述)。當粒子大時( $C_d \approx$ 常數)， $\Delta t$ 的上限與 $\sqrt{D}$ 成正比(如(19)式描述)。另外值得一提的，當粒子直徑 $D=0.01\text{mm}$ ，可求得 $\Delta t$ 的上限為 $10^{-4}$ 秒。在這種情況下，所花費的計算時間是相當可觀的。

## 六、山岳波對粒子運動軌跡影響之探討

吾人將以第三節所提出之觀念模式，來檢驗Stout et al.(1993)對粒子在週期地形中運動之研究結果，並推廣至孤立地形的情况。其討論分述如下：

### (一)週期地形對粒子運動的影響

吾人以Stout et al.(1993)的研究來驗證所提之觀念模式，結果發現十分吻合。除此，尚針對Stout et al.(1993)所未強調之現象，共設計了四個個案(編號由A0到A3)，其條件如表四所示。吾等將藉這些個案來探討(1)粒子很小時，數值方法之穩定性。(2)不同傳播模山岳波對粒子影響之差異。(3)相同控制變數之山岳波對粒子影響之差異。吾人將20個粒子於2公里處高度等間距釋放，然後計算其運動軌跡。



在個案A0中 $a = 4000m$ ， $h_m = 200m$ ， $U = 10m/s$ ， $N = 0.02s^{-1}$ ， $\rho_p = 1000kgm^{-3}$ 。當粒子直徑 $D = 0.01mm$ 時，山岳波垂直風速遠大於粒子在無基本風中的終端速度，即 $w' \gg W_t$ 。因此粒子軌跡幾乎和山岳波相同，如圖8所示。本個案只釋放四個粒子。此結果亦顯示吾人所提出之數值方法可適用於很小之粒子。

以下除非特別說明，粒子大小均設為 $1.0mm$ 。個案A1和A2的差別在於浮揚頻率的大小，分別為 $N = 0.02s^{-1}$ 及 $N = 0.025s^{-1}$ 。前者之山岳波相位斜率 $\frac{U}{aN}$ 大，因此 $|\frac{U}{aN} - \frac{|W_t|}{U}|$ 大，所以粒子軌跡的波動性質大(接近地表處有明顯之不同，見圖2.a、圖9)。

接下來吾人固定 $\frac{U}{aN}$ 及 $\frac{|W_t|}{U}$ ，但選擇不同之浮揚頻率和地形水平尺度，如個案A1和A3。因個案A1的水平尺度小，地形高寬比大，以致山岳波垂直速度大(因為 $w'_{max} \approx \frac{Uh_m}{a}$ )。所以粒子軌跡之波動性以個案A1較大，如圖2.a、圖10所示。

表四 地形為週期山時，個案A0到A3的條件。其中 $a$ 、 $h_m$ 分別是地形水平尺度和高度， $U$ 、 $N$ 是大氣基本風場大小和浮揚頻率， $D$ 是粒子直徑。

	D(mm)	a(m)	hm(m)	U(m/s)	N(1/s)	U/aN	U/Nhm
A0	0.01	4000	200	10	0.02	0.125	2.5
A1	1	4000	200	10	0.02	0.125	2.5
A2	1	4000	200	10	0.025	0.1	2
A3	1	5000	200	10	0.016	0.125	3.25

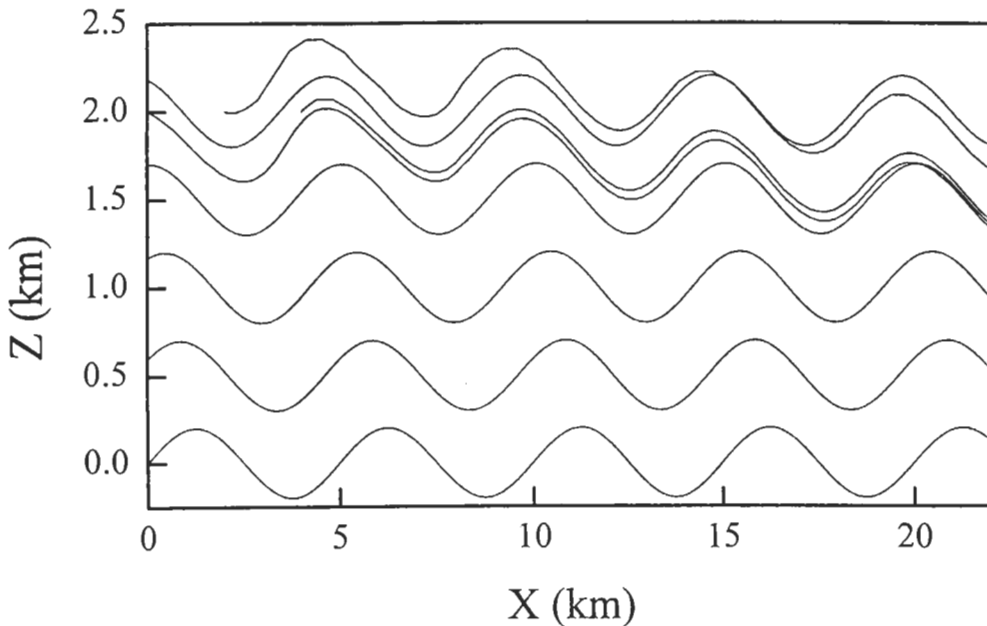


圖8 將4個粒子於2公里高度等間距釋放，然後計算其運動軌跡。粒子直徑 $D = 0.01mm$ 時，此時 $w' \gg W_t$ ，因此粒子軌跡幾乎和山岳波相同。

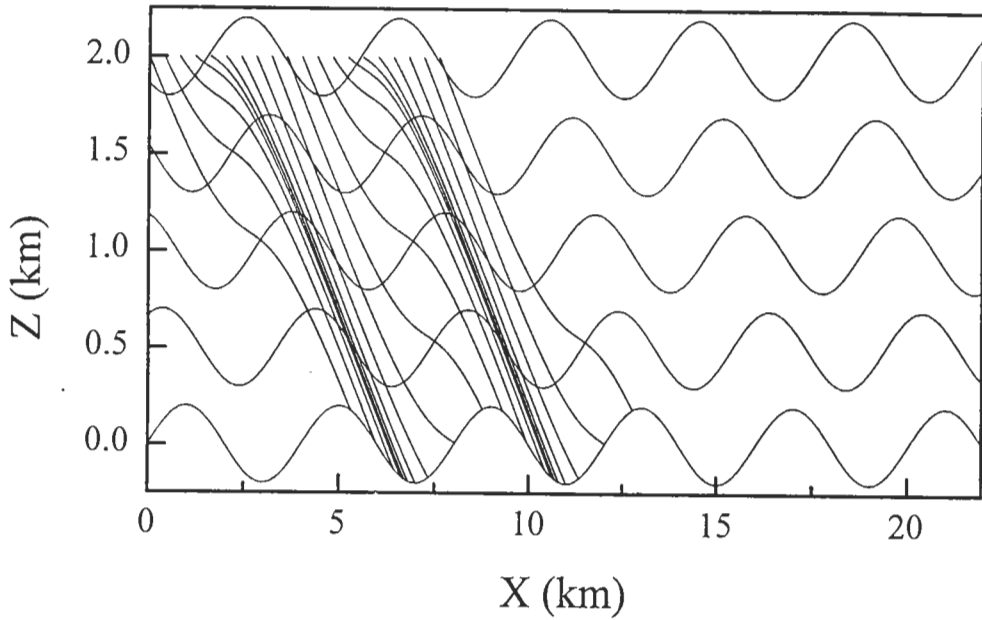


圖9 說明同圖2，但個案A2浮揚頻率的大小為 $N = 0.025s^{-1}$ ，相較於個案A2(如圖2.a)，其山岳波相位斜率 $\frac{U}{aN}$ 小，所以粒子軌跡的波動性質小。

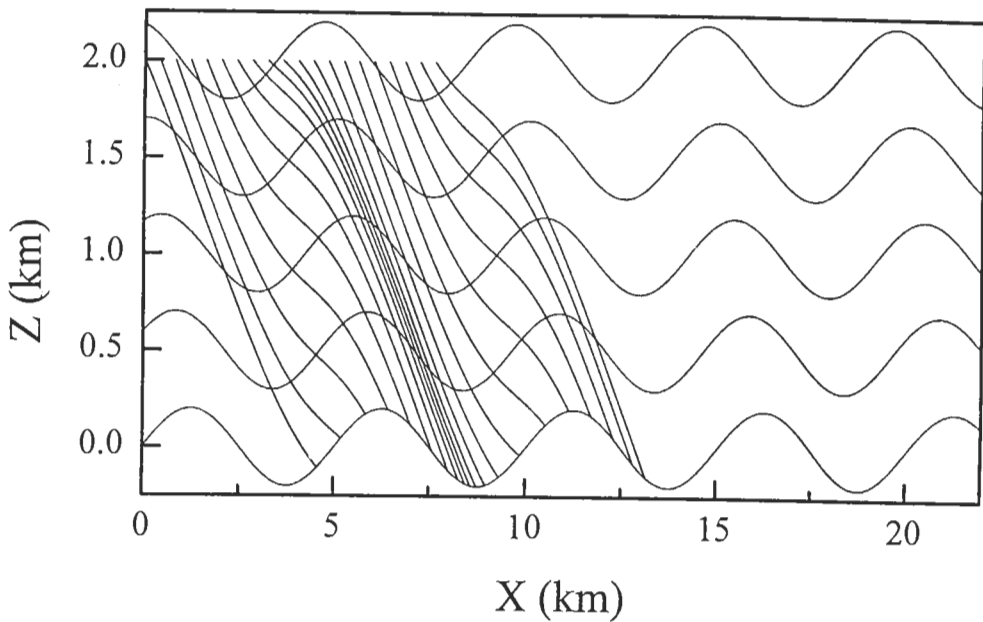


圖10 固定 $\frac{U}{aN}$ 及 $\frac{|W_1|}{U}$ ，但選擇不同之浮揚頻率和地形水平尺度，與個案A1(圖2.a)比較，個案A3的水平尺度大，粒子軌跡之波動性較小。

## (二) 孤立地形對粒子運動的影響

在個案B0到B6中，其選定條件如表五所示。吾人將40個粒子於1.2公里高度等間距釋放，然後計算其運動軌跡(此有別於週期山的情況，乃因選取之孤立山，其所造成之山岳波振幅較小之故)。

表五 地形為孤立山時，個案B0到B8的條件。變數說明同表四。

	D(mm)	a(m)	h <sub>m</sub> (m)	U(m/s)	N(1/s)	U/aN	U/Nh <sub>m</sub>
B0	0.2	1000	200	10	0.01	1	5
B1	0.2	1000	200	10	0.02	0.5	2.5
B2	0.2	1000	200	10	0.012	0.83	4.17
B3	0.2	2000	200	10	0.02	0.25	2.5
B4	0.2	1000	200	15	0.02	0.75	3.75
B5	0.2	1000	100	10	0.02	0.5	5
B6	0.1	1000	200	10	0.02	0.5	2.5

在個案B0中， $a = 1000m$ ， $h_m = 200m$ ， $U = 10m/s$ ， $N = 0.01s^{-1}$ ， $D = 0.2mm$ ， $\rho_p = 1000kgm^{-3}$ 。此時山岳波在垂直方向為侷限模。當粒子自1.2公里等間隔釋放後，其運動軌跡如圖11所示。

個案B1和B0的差別為浮揚頻率 $N$ ，分別為 $0.02s^{-1}$ 及 $0.01s^{-1}$ 。個案B1的浮揚頻率大，山岳波在垂直方向為傳播模，相較個案B0的結果，在此條件下的粒子軌跡，於流線密集處有集中的現象(見圖12)。因此吾人可以下一結論：當地形為孤立山，粒子在傳播模山岳波中，不同粒子之軌跡線較易集中。而粒子在侷限模山岳波中運動，則不容易集中。此一結論和週期地形的情況是相同的。

以下討論將集中於山岳波為傳播模的情況，在個案B2和B1中，其山岳波均為傳播模，個案B2之浮揚頻率 $N$ 為 $0.012s^{-1}$ ，所以山岳波相位斜率 $\frac{U}{aN}$ 較個案B1大，因此其粒子軌跡較個案B1更為集中(山頂1000公尺處)，其結果如圖13、圖12所示。

個案B3和B1的差別在地形之水平尺度 $a$ ，個案B3之地形水平尺度較大，使得 $\frac{U}{aN}$ 、 $|\frac{U}{aN} - \frac{|w'_1|}{U}|$ 、且 $w'_{max}$ 三者均變小，所以粒子受山岳波影響小，如圖14、圖12所示。

當基本風場 $U$ 增加(見個案B4和B1)，因為個案B4的 $|\frac{U}{aN} - \frac{|w'_1|}{U}|$ 較大，且山岳波垂直速度 $w'$ 亦增加，因此粒子受山岳波影響大(見圖15及圖12)。

考慮山高影響(見個案B5和B1)，因為前者山高小，所以山岳波垂直速度 $w'$ 小，因而粒子受山岳波影響小(見圖16及圖12)。

當粒子顆粒變小時(見個案B6和B1)，因為粒子終端速度 $W_t$ 小，所以粒子受山岳波影響大(見圖17與圖12)。

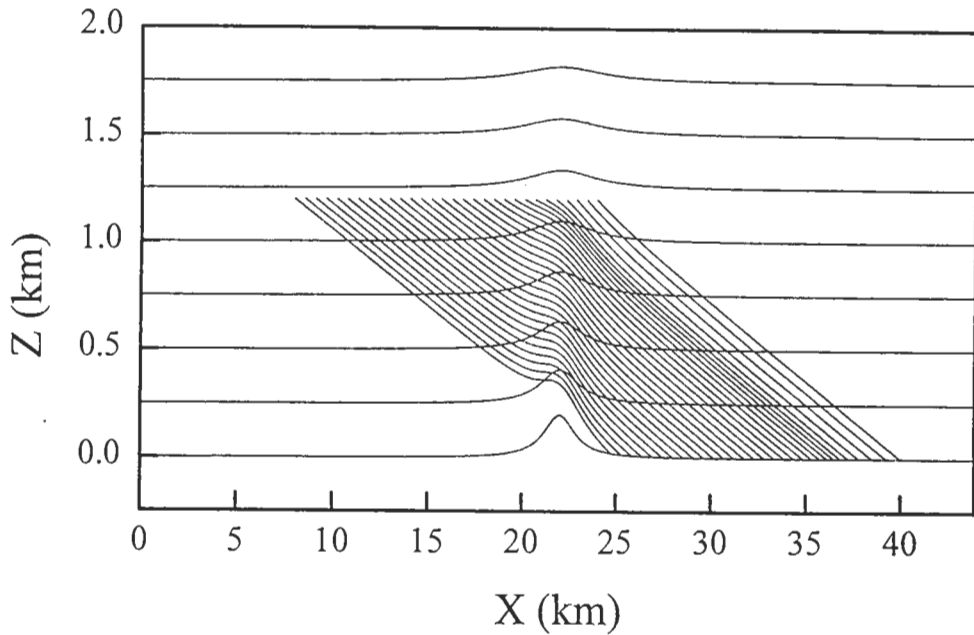


圖 11 考慮孤立地形的效應，將 40 個粒子於 1.2 公里處等間距釋放，然後計算其運動軌跡。個案 B0 中， $a = 1000m$ ， $h_m = 200m$ ， $U = 10m/s$ ， $N = 0.01s^{-1}$ ， $D = 0.2mm$ ， $\rho_p = 1000kgm^{-3}$ ，此時山岳波在垂直方向為侷限模。

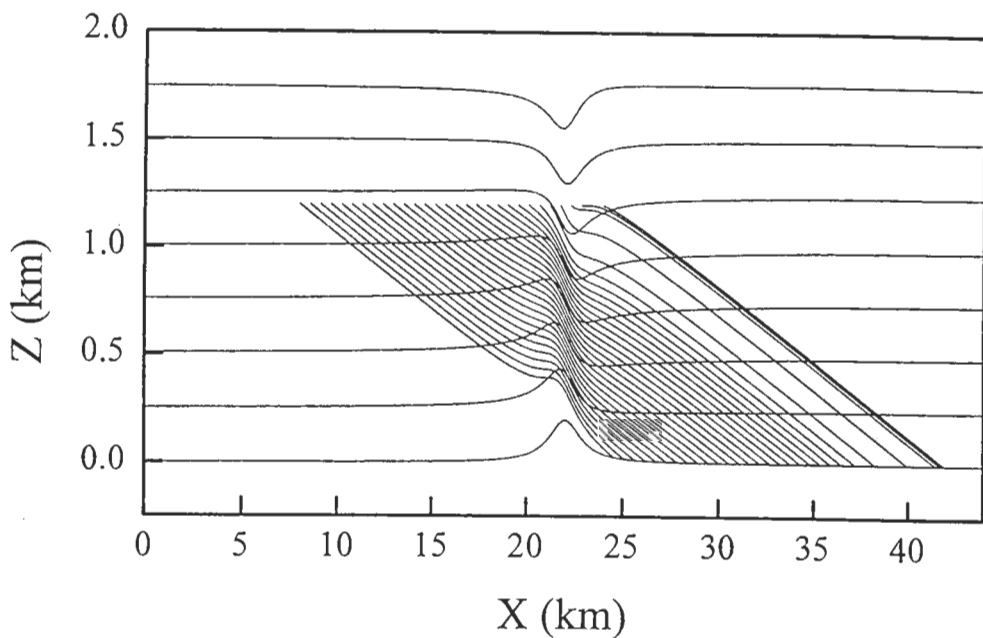


圖 12 說明同圖 11，但個案 B1 的浮揚頻率  $N$  為 0.02，較個案 B0 的大，此時山岳波在垂直方向為傳播模，而粒子軌跡在流線密集處有集中的趨勢。

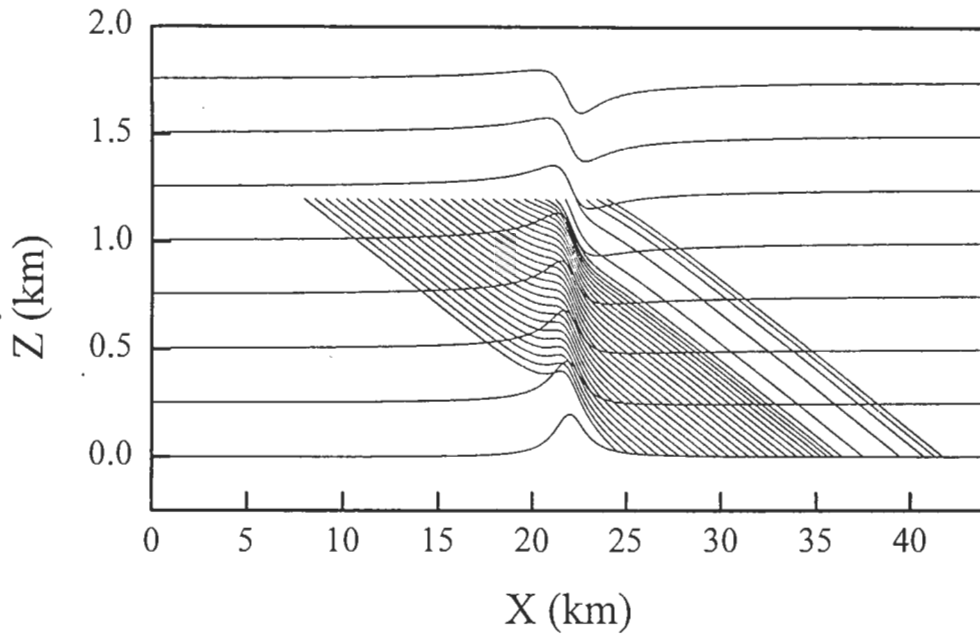


圖 13 說明同圖 12，個案 B2 和 B1 其山岳波均為傳播模，但個案 B2 之浮揚頻率  $N$  為 0.012，粒子軌跡較個案 B1 更為集中(山頂 1000 公尺)。

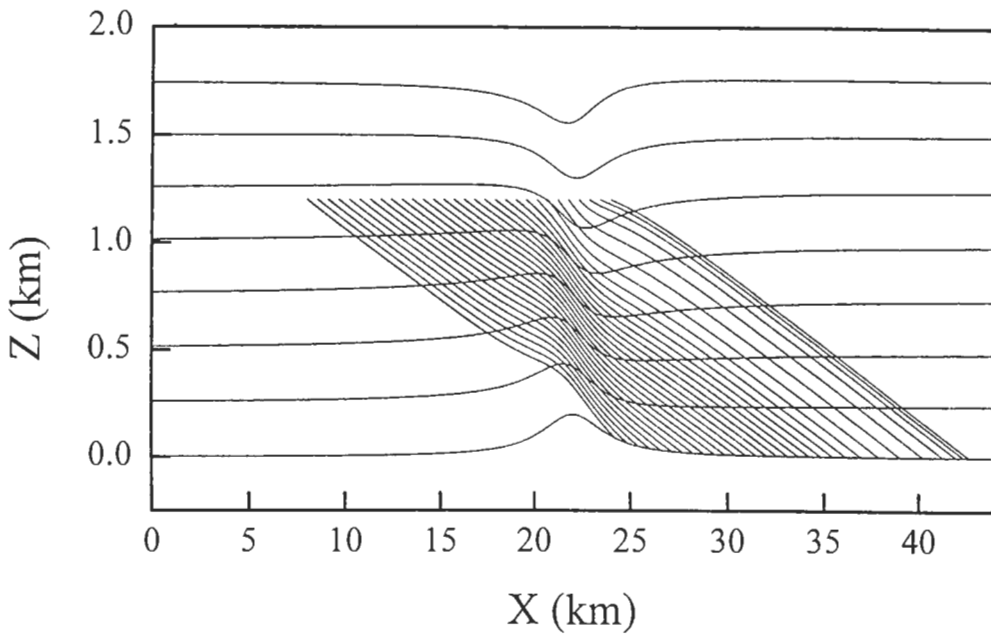


圖 14 說明同圖 12，但個案 B3 之地形之水平尺度(a)較個案 B1 大，粒子受山岳波影響小。

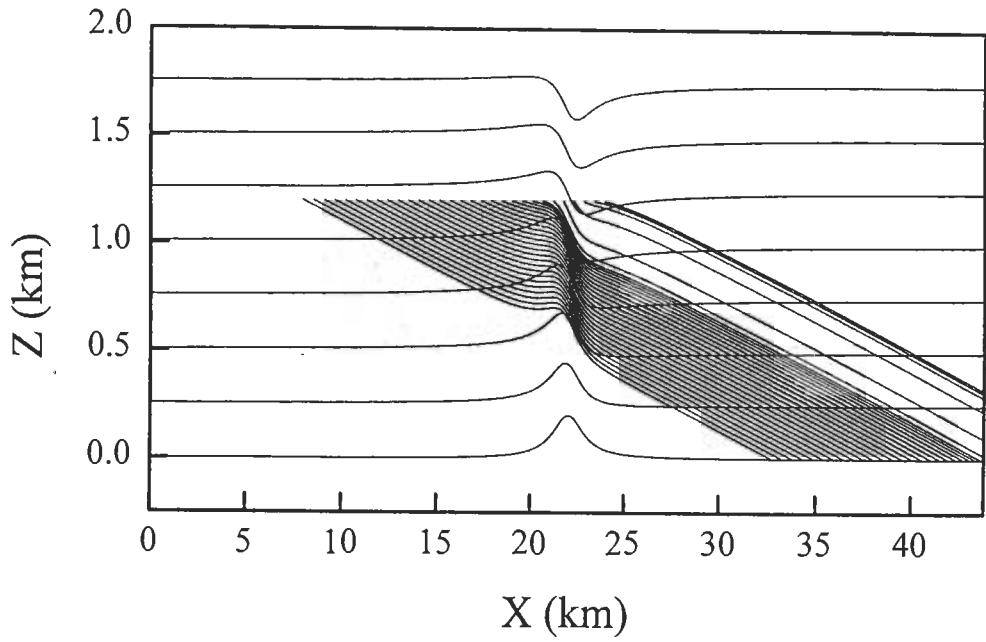


圖 15 說明同圖 12，但個案 B4 之基本風場  $U$  較個案 B1 大，粒子受山岳波影響大。

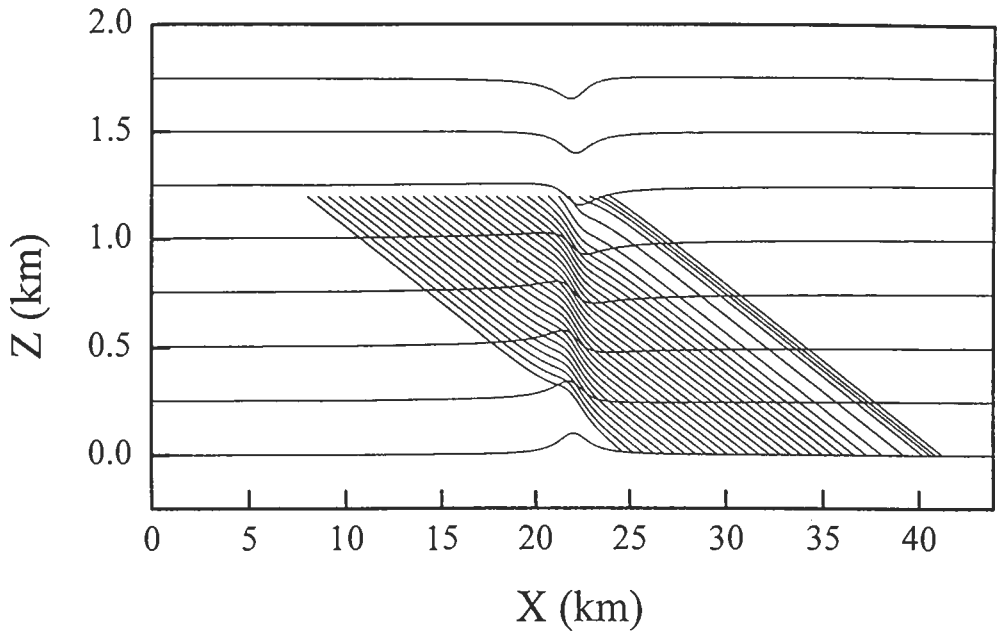


圖 16 說明同圖 12，個案 B5 之山高較個案 B1 小，粒子受山岳波影響小。

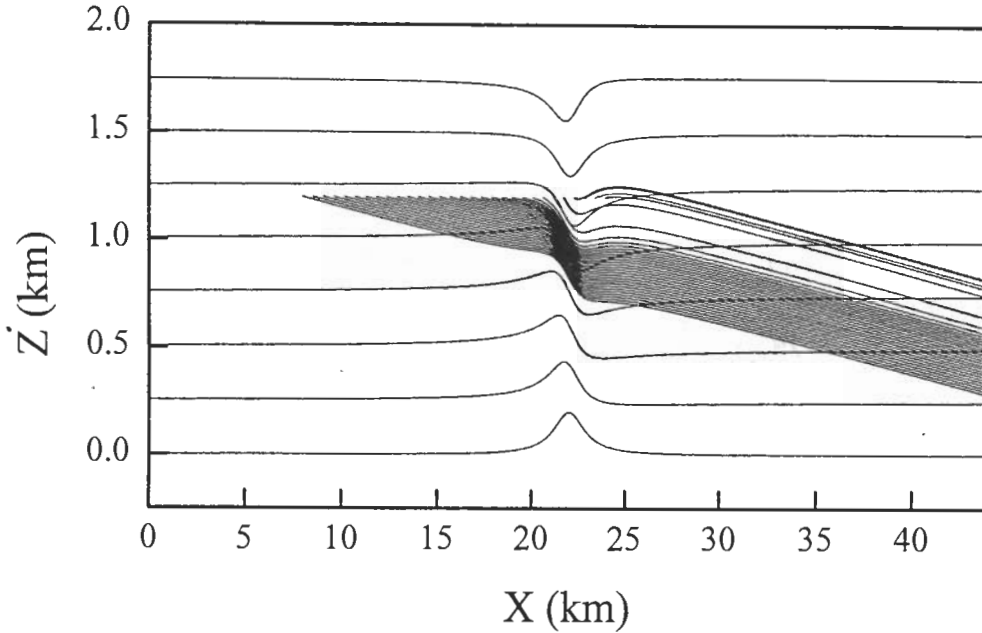


圖17 說明同圖12，個案B6之粒子顆粒較個案B1小，粒子運動軌跡受山岳波影響大。

以上個案比較，均可用吾人在第四章所提出之觀念模式及兩個控制參數來說明，增進對粒子動力行為之了解。

## 七、結論與展望

在本文的研究中，吾人提出一概念模式，以便解釋粒子在週期山及孤立山所引發之山岳波中運動之動力機制，並論證 Stout et al. (1993) 之研究成果。吾人概念模式之控制因子用以解釋粒子在山岳波中之運動行為  $\frac{w'}{W_t}$ ，及  $|\frac{U}{aN} - \frac{|W_t|}{U}|$ ，其中，前者為氣流垂直速度與粒子終端速度的比值， $\frac{U}{aN}$  是山岳波相位傾斜程度，而  $\frac{|W_t|}{U}$  則為粒子於均勻風場中之運動軌跡的斜率。以上任一控制因子，若其值增大，則粒子軌跡所呈現的波動性愈大。當  $w' \gg W_t$  時，粒子行為幾乎和山岳波相同；反之，粒子則是幾乎不受波動影響，其中  $w' \simeq W_t$  則是吾人較關注的。在這種情況下，吾人認為其運動軌跡主要由粒子在均勻風場中的運動軌跡所決定，但受到山岳波動的修正。當  $\frac{U}{aN}$  及  $\frac{|W_t|}{U}$  的值相差越大時，即代表等相位和無地形之運動軌跡間的夾角大，則粒子軌跡受山岳波影響大，所呈現之波動性較大。以上兩個控制因子中，各項參數之影響整理如下：

- (i) 浮揚頻率  $N$  的效應：對於孤立山而言，粒子的軌跡在傳播模山岳波中的波動性較侷限模山岳波明顯，這和 Stout et al. (1993) 的結論是相同的。而針對傳播模進一步研究顯示，對於週期地形而言，當  $N$  增加， $|\frac{U}{aN} - \frac{|W_t|}{U}|$  變小，所以粒子軌跡波動性小。在孤立山時， $\frac{U}{aN}$  則決定粒子束凝聚區的走向。

(ii) 地形水平尺度  $a$  的效應：當  $a$  大，山岳波相位斜率  $\frac{U}{aN}$  小，且山岳波垂直速度  $w'_{max}$  亦小（因為地形高寬比小），所以粒子軌跡所呈現的波動性小。

(iii) 基本風場  $U$  的影響：當  $U$  增加，因為山岳波垂直速度  $w'$  和山岳波相位斜率  $\frac{U}{aN}$  均變大，所以粒子軌跡所呈現的波動性大。

(iv) 粒子顆粒大小  $D$  的影響：當  $D$  變小，使得粒子終端速度  $W_t$  變小，所以  $\frac{w'}{W_t}$  和  $|\frac{U}{aN} - \frac{|W_t|}{U}|$  均變大，因此粒子軌跡所呈現的波動性大。

(v) 地形高度的效應：當  $h_m$  增加，地形高寬比變大，所以山岳波垂直速度  $w'$  變大，因此粒子軌跡所呈現的波動性大。

(vi) 吾人研究結果顯示在不同之基本風場或地形水平尺度之條件下，若  $\frac{U}{aN}$  相同時，則其山岳波之動力機制相同，但對粒子運動的影響是不同的。

此外，當粒子的運動方程寫成差分方程式時，其積分時間  $\Delta t$  有其限制，以避免其數值溢位或出現解分歧現象。吾人定義  $\Delta t_c$  為出現數值溢位或出現解分歧時之時間積分，當粒子小時，空氣阻力與相對速度（粒子速度相對風場速度）一次方成正比，而  $\Delta t_c$  則與  $D^2$  成正比；而粒子大時，空氣阻力與相對速度二次方成正比，而  $\Delta t_c$  則與  $\sqrt{D}$  成正比。因此當  $\Delta t_c$  小，且風場由模式輸入時，若其空間解析度不高，則易造成計算阻力時，均由相同之網格點作內差來求得風場速度，造成誤差的累積。

本文中著重探討粒子運動受線性山岳波作用的動力機制，未來可進一步研究非線性風場，垂直分層大氣結構 (stratified multi-layer flow, Lin, 1991)，以及邊界層對粒子運動的影響。而熱力引發之重力波風場對粒子運動的影響，亦是吾人未來所關切的課題。

## 誌 謝

本研究乃在國科會計畫 NSC84-2111-M-008-014 AP3 支持下完成。國立中央大學大氣物理研究所提供必要的電腦相關設備，俾使研究順利完成，另外也十分感謝孟德梅小姐對資料的繪製。林玉郎教授撥冗閱讀並提出改進意見，豐富本文內容。彭啓明協助訂正、完稿。

## 附錄 A：

欲求解 (10.c) 式，吾人得先求 homogeneous 的解，令  $W_n^h = r^n$  帶入上式，可得

$$W_n^h = (1 - \alpha \Delta t)^n \quad (A-1)$$

再者吾人求取特殊解 (particular solution)，令  $W_n^p = c$

$$W_n^p = \frac{-g}{\alpha} \quad (A-2)$$

即終端速度，所以通解為



$$W_n = c_0 W_n^h + W_n^p = c_0(1 - \alpha \Delta t)^n + \frac{-g}{\alpha}, \quad c_0 \text{ 爲常數}$$

若  $n = 0$  (即  $t = 0$ ) 時,  $W = W_0$  則

$$W_n = (W_0 + \frac{g}{\alpha})(1 - \alpha \Delta t)^n + \frac{-g}{\alpha} \quad (A-3)$$

此即(11)式。

## 附錄 B :

爲方便求得(13)式之解, 吾人令  $W < 0$ , 因此(13)式爲:

$$\frac{dW}{dt} = -g + \alpha W^2 \quad (B-1)$$

$$\frac{dW}{W^2 - W_t^2} = \alpha dt, \quad W_t^2 = \frac{g}{\alpha} \quad (B-2)$$

$$\frac{1}{2W_t} \left( \frac{dW}{W - W_t} - \frac{dW}{W + W_t} \right) = \alpha dt$$

$$\frac{1}{2W_t} (\ln(W - W_t) \Big|_0^W - \ln(W + W_t) \Big|_0^W) = \alpha t$$

$$\frac{W_t - W}{W + W_t} = e^{2\sqrt{\alpha g}t}$$

得(14.a)及(14.b)式

$$W = W_t \left( \frac{e^{\sqrt{\alpha g}t} - e^{-\sqrt{\alpha g}t}}{e^{\sqrt{\alpha g}t} + e^{-\sqrt{\alpha g}t}} \right) \quad (B-3)$$

## 附錄 C :

粒子垂直方向的運動方程爲

$$\frac{dW}{dt} = -g + \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_p} \frac{C_d}{D} |W| (-W) \quad (C-1)$$

若  $C_d = A + \frac{B}{Re} + \frac{C}{Re^2}$ ,  $W < 0$  且  $Re = \frac{|W|D}{\nu}$

$$\frac{dW}{dt} = -g + \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_p} \frac{1}{D} |W| (-W) \left( A + B \frac{\nu}{|W|D} + C \frac{\nu^2}{|W|^2 D^2} \right) \quad (C-2)$$

$$\frac{dW}{dt} = -g + \alpha W^2 - \beta W + \gamma$$

$$\alpha = \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_p} \frac{A}{D}, \quad \beta = \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_p} \frac{\nu B}{D^2}, \quad \gamma = \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_p} \frac{\nu^2 C}{D^3}$$

化成差分方程

$$\frac{W_{n+1} - W_n}{\Delta t} = -g + \alpha W_n^2 - \beta W_n + \gamma$$

$$W_{n+1} = -g\Delta t + \alpha W_n^2 \Delta t - \beta W_n \Delta t + \gamma \Delta t + W_n \quad (C-3)$$

若有解分歧，則

$$\begin{aligned} W_{m+1} &= f(W_m), \quad W_m = f(W_{m+1}) \\ W_{m+1} &= -g\Delta t + \alpha W_m^2 \Delta t - \beta W_m \Delta t + \gamma \Delta t + W_m \end{aligned} \quad (C-4.a)$$

所以

$$W_m = -g\Delta t + \alpha W_{m+1}^2 \Delta t - \beta (W_{m+1}) \Delta t + \gamma \Delta t + W_{m+1} \quad (C-4.b)$$

由(C-4.a)、(C-4.b)式相減，可得

$$W_m + W_{m+1} = \frac{-(2 - \beta \Delta t)}{\alpha \Delta t} \quad (C-6)$$

(C-4.a)式乘以  $W_{m+1}$ ，(C-4.b)式乘以  $W_m$ ，然後相減，得

$$\begin{aligned} W_{m+1}^2 - W_m^2 &= -g(W_{m+1} - W_m)\Delta t + \alpha W_m W_{m+1}(W_m - W_{m+1})\Delta t + \gamma(W_{m+1} - W_m)\Delta t \\ \text{化減後 } W_m W_{m+1} &= \frac{1}{\alpha \Delta t} \left( \frac{2 - \beta \Delta t}{\alpha \Delta t} - g\Delta t + \gamma \Delta t \right) \end{aligned} \quad (C-7)$$

由(C-6)及(C-7)式，可決定一二次方程式(其解由  $W_m$  和  $W_{m+1}$  組成)，

$$W^2 - (W_m + W_{m+1})W + W_m W_{m+1} = 0$$

其判別式為

$$\Lambda = (W_m + W_{m+1})^2 - 4W_m W_{m+1} = \left( \frac{2 - \beta \Delta t}{\alpha \Delta t} \right)^2 - 4 \frac{1}{\alpha \Delta t} \left( \frac{2 - \beta \Delta t}{\alpha \Delta t} - g\Delta t + \gamma \Delta t \right)$$

化簡而得

$$\Lambda = \frac{1}{(\alpha \Delta t)^2} ((2 - \beta \Delta t)^2 - 4(2 - \beta \Delta t) - 4\alpha(\gamma - g)\Delta t^2) \quad (C-9)$$

即文中(21.a)式。

當  $C_d = A$ ，則  $\beta = 0, \gamma = 0$  (即  $C_d$  視為常數)

$$\Lambda = \frac{1}{(\alpha \Delta t)^2} (-4 + 4\alpha g \Delta t^2) \quad (C-10)$$

即文中(17)式。

又若令(C-9)式為零，則

$$(2 - \beta \Delta t)(-2 - \beta \Delta t) - 4\alpha(\gamma - g)\Delta t^2 = 0$$

化簡後可以求得

$$\Delta t_c = \sqrt{\frac{4}{\beta^2 - 4\alpha(\gamma - g)}} \quad (C-11)$$

## 參考文獻

Bender, G. M. and S. A. Orzag, 1978: Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, McGraw-Hill, New York, 593pp.

- Fowles, G. R., 1986: Analytical Mechanics, 4th Ed., CBS College Publishing, New York, 342pp.
- Gunn, R. and G. D. Kinzer, 1949: The Terminal Velocity of Fall for Water Droplets in Stagnant Air. *J. Meteor.*, **6**, 243-249.
- John, F., J. E. Marsden and L. Sirovich, 1983: Regular and Stochastic Motion Springer-Verlag, New York, 499pp.
- Lin, C. L., 1985: Elements of Discrete Mathematics, second edition, McGraw-Hill, New York, 433pp.
- Lin, N.-H., 1991: Cloud Acidity and Acidic Deposition in the Lower Troposphere and Ozone Depletion in the Antarctic Stratosphere: Modeling and Data Analysis Regarding the Role of Atmosphere Aerosol. Ph.D. dissertation, North Carolina State University, Raleigh, North Carolina, 190pp.
- Morsi, S. A., and A. J. Alexander, 1972: An investigation of particle trajectories into two-phase flow systems. *J. Fluid Mech.*, **55**, part 2, 193-208.
- Queney, P., 1948 :The problem of air flow over mountains:a summary of theoretical studies. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **29**, 16-26.
- Smith, R. B., 1979 :The influence of mountain on the atmosphere. *Advances in Geophysics*, **vol. 21**, Academic Press, 87-230.
- Stout, J. E., Y. L. Lin, and S. P. S. Arya. 1993: A theoretical investigation of the effects of sinusoidal topography on particle deposition. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 2533-2541.

# A Theoretical Study of the Effects of an Isolated Mountain on Particle Deposition

Bo-Wen Shen    Neng-Huei Lin

Department of Atmospheric Sciences  
National Central University

## ABSTRACT

In this paper we perform a theoretical approach to study the effects of an isolated mountain on particle deposition. We first follow a previous work by Stout et al. (1993, *J. Atmos. Sci.*, vol 50) regarding the dynamical behavior of particles in the atmospheric flow driven by sinusoidal mountain waves. In their numerical method, we demonstrate that the integration time should have an upper limit to avoid a numerical overflow and bifurcation and it can be regulated as a function of particle size. Furthermore, the trajectories of particles released at certain positions are depicted under various flow conditions induced by an isolated mountain. As a result, particle trajectories show more wavelike, if the mode of mountain wave falls in the regime of vertically propagating waves. In our conceptual model, two parameters which are related to the terminal velocity of a particle and the degree of mountain wave tilting, respectively, can be used to describe the dynamical features of particle deposition.

Key words : Overflow, Bifurcation, Terminal velocity.