

# 半拉格朗日法與正定義數值方法之比較

柳再明<sup>1</sup> 郭鴻基<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 中央氣象局氣象資訊中心

<sup>2</sup> 國立台灣大學大氣科學系

(中華民國八十三年十一月二十九日收稿；中華民國八十四年三月二十一日定稿)

## 摘 要

本文以高斯波形、餘弦波及幣形圓柱三種不同形體的平流計算，來探討比較半拉格朗日法 (semi-Lagrangian scheme)、及 Smolarkiewicz 法與 Hsu-Arakawa 法兩種正定義法。研究結果顯示，半拉格朗日法積分時距大小的選擇，不受限於穩定度，只受限於精確度及軌跡線上的風切大小。若半拉格朗日法使用的時距愈大，相位誤差愈大，而時距過小則因內插次數過多，精確度也會降低。因此定出最適當的時距以達最佳精確度，是使用半拉格朗日法重要的事情之一。經前述三種不同性質之形體的平流探討，半拉格朗日法振幅的維持，大致上比 Smolarkiewicz 法與 Hsu-Arakawa 法之正定義方法，及 FD4 都要好。不過對幣形圓柱之平流，半拉格朗日法有過量 (overshoot) 及負值 (undershoot) 的現象，大小可達 10% 以上，然而 FD4 完全不能掌握幣形圓柱的平流，而兩種正定義方法皆有合理表現。

關鍵詞：半拉格朗日法、正定義法、幣形圓柱

## 一、前 言

在大氣模式 (NWP、GCM、雲模式) 的計算中，模式積分時距大小的選擇，非因精確度的需求，而往往受限於含極少能量之高速波動 (如聲波、Lamb 波等)，也就是說  $\Delta t$  受限於穩定度 (CFL) 而過小；此為長久以來一直困擾大氣模式效率的問題之一。為了積分過程保持穩定，時距必須用的很小，因此來自時間的誤差遠小於來自空間的誤差。所以要設計一個很有效率的天氣預報模式，時間積分方法的選定是極其重要的。以數值天氣預報而言，早期的大氣模式使用顯式跳蛙 (explicit leapfrog) 法，其時距大小受重力波的傳播速度所限制 (一般而言，重力波無關乎預報之綜觀天氣系統)，十分沒有效率。以半隱式 (semi-implicit) 的方法處理有關重力波的各線性項，可以放大時距的大小至 6 倍，且除了須額外解一橢圓方程的計算花費外，這種

方法不會降低精確度(如參考Robert 1969, Robert等1972)。而在球面波譜模式中求解此橢圓方程,則不需多餘之計算時間。以氣象局300公里之解析度的全球模式為例,  $\Delta t$  為3分鐘(其為顯式模式),而相同解析度的半隱式模式,  $\Delta t$  則為15分鐘的。半隱式法的時距,僅受限於水平風場之大小,但因大尺度模式中,局部噴流速度幾達100m/s,因此半隱式法之最大穩定的時距大小,仍小於精確度所考慮的時距大小(Robert 1981)。

半拉格朗日(semi-Lagrangian)對平流的處理形式,在過去十多年來,被視為極具效率性的天氣預報模式之平流方法,因為半拉格朗日法比歐勒(Euler)平流方法可以使用相當大的時距(沒有損失精確度),而歐勒平流法的時距大小受限於穩定度。要達成半拉格朗日法能順利使用大時距有效率的積分模式,半拉式法必須結合能穩定處理重力波的方法。Robert(1981,1982)以半拉格朗日法處理平流以半隱式法處理重力波,其最大穩定時距比半隱式法可再擴大為六倍(需再花費少許的計算時間)。文中用三個時階的淺水方程有限差分模式來探討,也顯示空間的誤差和時間的誤差大小約相當。約同時Bates和McDonald(1982)及Bates(1984)文中指出半拉格朗日處理平流時,可以結合顯式分離(split explicit)法或其他隱式法來處理線性項。McDonald(1986)及Temperton和Staniforth(1987)討論較有效率的兩個時階(two-time-level)之半拉格朗日法。Staniforth和Temperton(1986)文中顯示半拉格朗日法用很大的時距,比有高解析度的歐勒模式,可以預報出相當好的綜觀尺度場。Tanguay等(1989)以三維半拉格朗日模式,用比歐勒模式三倍大的時距,其48小時的電腦執行時間約為歐勒模式的一半多一些。Williamson和Rasch(1989)在半拉格朗日法中用Hermite三階內插取代尋常的三階內插,不但波形可以保持較好,也避免負值的產生,其應用他們的半拉格朗日法,在NCAR GCM和NMC全球模式的水汽平流方程都得到不錯的結果。近年來,Bermejo及Staniforth(1992)、Priestley(1993)用flux-corrected transport(FCT)的觀念使其半拉格朗日法的結果沒有過量(overshoot)和負值(undershoot)的現象產生。Staniforth和Cote(1991)對半拉格朗日法做了很好的回顧。程(1987)應用半拉式法於正壓颱風路徑預報模式的改進。

所謂正定義法(positive definite scheme)是指在數值積分過程中,保持平流場值恆為正的平流數值方法。一般正定義計算法,皆有良好之質量保守,物理場只向下游傳送,以及被傳送場只跟當地(local)性質有關之特性。這些特性對平流方程式計算而言,是十分的重要。正定義方法的種類方面,FCT法是相當著名的方法,它是由Boris和Book(1973),Boris(1976),Book等(1975)發展而來,而Zalesak(1979)將FCT法擴充到多維。FCT法對方形波的平流模擬結果近乎完美,但其缺點是,會把一平滑之正弦波變成一方形波,而且造成極大值之衰減(Rood 1987)。Smolarkiewicz(1983)提出一非線性平流正定義數值方法,擁有預報與校正兩階段。其方法在校正階段利用泰勒(Taylor)級數,導出反擴散(anti-diffuse)的過程,以重新聚集預報階段(上游法)所擴散出去的質量,減少極大值之衰減。以不同泰勒級數之階數求反擴散速度,Smolarkiewicz法可分二(低)階法(SML)和三(高)階法(SMH)。Hsu和Arakawa(1990)在等熵座標中模擬斜壓不穩定時,為了避免零質量層中產生負質量點,使用改良Takacs(1985)法為正定義數值方法,並得到相當好的結果。

Pudykiewicz和Staniforth(1984)用理想化的初始條件來分析半拉格朗日法,文中直接比較各種半拉格朗日法的優劣所在。本文的目的之一和Pudykiewicz和Staniforth(1984)類似,在高斯波

形、餘弦波及幣形圓柱的探討之下，我們比較半拉格朗日法、Smolarkiewicz法及Hsu-Arakawa法與FD4(四階空間二階時間中差分法)。本文另一個目的，是要探討半拉格朗日法各執行步驟的重點所在，如回溯點(departure point)疊代的收斂次數、半拉格朗日法的振幅衰減、相位表現如何以及在作業觀點上，半拉格朗日法的時距大小所受的限制等，都是我們要研究的重點。文中第二節說明半拉氏法的原理，第三節是結果與討論，結論則放在第四節。最後要附帶說明的是，本文是柳(1993)博士論文的一部份，我們從其中獨立出本文來發表。

## 二、半拉格朗日法

### (一)半拉格朗日法的原理

半拉格朗日法執行程序的基本原理是根據Robert(1981)。我們以二維平流方程式(1)來探討

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

(1)式改寫成

$$\frac{d\psi}{dt} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d\underline{S}}{dt} = \vec{V}. \quad (3)$$

以三個時階(three time levels)為例，半拉格朗日法的原理是，對於在 $t + \Delta t$ 時刻，到達 $(x_{i,j}, y_{i,j})$ 網格點之氣塊，假設來自 $t - \Delta t$ 時刻的回溯點(departure point)  $(x_{i,j} - 2\alpha_{i,j}, y_{i,j} - 2\beta_{i,j})$ (通常不會在網格點上)。那麼(2)式的意義即為

$$\psi(x_{i,j}, y_{i,j}, t + \Delta t) = \psi(x_{i,j} - 2\alpha_{i,j}, y_{i,j} - 2\beta_{i,j}, t - \Delta t). \quad (4)$$

$\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}$ 之求法，可以用(3)式來推導，推導過程如下：

$$\int_{\underline{r}_{i,j} - 2\underline{d}_{i,j}}^{\underline{r}_{i,j}} d\underline{S} = \int_{t - \Delta t}^{t + \Delta t} \vec{V} dt. \quad (5)$$

其中 $\underline{r}_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j})^T$ ， $\underline{d}_{i,j} = (\alpha_{i,j}, \beta_{i,j})^T$ ， $\vec{V} = (u, v)$ 。(5)式等號右邊積分以中間點(mid-point)原理積分推導可得

$$\underline{d}_{i,j} = \Delta t \vec{V}(\underline{r}_{i,j} - \underline{d}_{i,j}, t) + O(\Delta t^2). \quad (6)$$

(6)式也可以寫成下面分量的形式

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i,j} \\ \beta_{i,j} \end{pmatrix} = \Delta t \begin{pmatrix} u(x_{i,j} - \alpha_{i,j}, y_{i,j} - \beta_{i,j}, t) \\ v(x_{i,j} - \alpha_{i,j}, y_{i,j} - \beta_{i,j}, t) \end{pmatrix} \quad (7)$$

在(6)式或(7)式中兩式， $(\alpha_{i,j}, \beta_{i,j})$ 同時出現於方程式等號的兩邊，可以藉疊代(iteration)法求得 $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}$ 的值。疊代的式子為下式

$$\underline{d}_{i,j}^{(n+1)} = \Delta t \vec{V}(x_{i,j} - \underline{d}_{i,j}^{(n)}, t), \quad (8a)$$

或是

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i,j}^{(n+1)} \\ \beta_{i,j}^{(n+1)} \end{pmatrix} = \Delta t \begin{pmatrix} u(x_{i,j} - \alpha_{i,j}^{(n)}, y_{i,j} - \beta_{i,j}^{(n)}, t) \\ v(x_{i,j} - \alpha_{i,j}^{(n)}, y_{i,j} - \beta_{i,j}^{(n)}, t) \end{pmatrix} \quad (8b)$$

其中  $(n)$  指的是第  $(n)$  次疊代。疊代之收斂可以證明如下；以 (8a) 式減去 (6) 式則為

$$\begin{aligned} \|\underline{d}_{i,j}^{(n+1)} - \underline{d}_{i,j}\| &= \Delta t \|\vec{V}(x_{i,j} - \underline{d}_{i,j}^{(n)}, t) - \vec{V}(x_{i,j} - \underline{d}_{i,j}, t)\| \\ &= \Delta t \left\| \frac{\partial \vec{V}}{\partial S} \right\| \|\underline{d}_{i,j}^{(n)} - \underline{d}_{i,j}\|. \end{aligned} \quad (9)$$

定義  $\|\underline{d}_{i,j}^{(n+1)} - \underline{d}_{i,j}\|$  為  $\Delta d^{(n+1)}$ ，則上式可改寫為

$$\begin{aligned} \Delta d^{(n+1)} &= \Delta t \left\| \frac{\partial \vec{V}}{\partial S} \right\| \Delta d^{(n)} \\ &= \Delta t^2 \left\| \frac{\partial \vec{V}}{\partial S} \right\|^2 \Delta d^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (10)$$

在這裡  $\Delta d^{(n+1)}$  是第  $(n+1)$  次之疊代誤差，由 (10) 式可知 (8) 式收斂的條件為  $\Delta t \|\partial \vec{V} / \partial S\| \leq 1$ 。換言之，半拉格朗日法之時距，受限於軌跡線上風切之變化大小 ( $\|\partial \vec{V} / \partial S\|$ )。Kuo 和 Williams (1990) 則清楚指出，即使 ( $\|\partial \vec{V} / \partial S\|$ ) 很大之情形下 (如鋒面、風切帶附近)，半拉格朗日法仍十分有效率及正確，數值誤差會被局限在 ( $\|\partial \vec{V} / \partial S\|$ ) 附近，而不會影響到其它遠處之物理場。

由 (10) 式可得  $\Delta d^{(2)} = \Delta t^2 \|\partial \vec{V} / \partial S\|^2 \Delta d^{(0)}$ ，也就是說，第二次疊代的誤差即是  $O(\Delta t^2)$ 。因為 (6) 式的精確度為  $O(\Delta t^2)$ ，所以解 (7) 式不需要有三次 (含) 以上之疊代。我們的經驗是，由上一級的  $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}$  值當  $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}$  的初始值，解 (8) 式大都只需要反覆兩次，即可收斂至一定的精確度 (我們取  $10^{-6}$ )。有  $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}$  的值，由 (4) 式可得下一個時間的  $\psi$  場。(8) 式中風場  $u, v$  的內插用二次線性內插，(4) 式的  $\psi$  場則使用三次內插 (bicubic interpolation)。三次內插是四階精確度，所以本章的半拉格朗日法是四階精確度的方法。當回溯點  $(x - 2\alpha_{i,j}, y - 2\beta_{i,j})$  離開計算範圍，我們以邊界點替代。

## (二) 研究數學問題

在本文中，我們以高斯波、餘弦波及幣形圓柱 (slotted cylinder) 三種不同數學性質的形體來探討。作高斯波的探討，是因高斯波是一無限連續之函數，在性質上近乎流體，適合探討數值方法的收斂性。餘弦波的探討，純粹是為了和 Pudykiewicz 及 Staniforth (1984) 文中的結果比較。且因為目的及波形不同，所以高斯波、餘弦波及幣形圓柱的探討，我們採取不同的計算範圍及相關位置。幣形圓柱是一難度極高的探討形體 (首見 Zalesak 1979)，圖 1 顯示幣形圓柱有許多不連續的地方，在最近的文章 (如 Bermejo 1990、Bermejo 和 Staniforth 1992、Priestley 1993)，似乎有愈來愈多的作者同意平流數值方法要經由幣形圓柱的模擬，來探討各方法對擁有如此多不連續點形體的表現情形。

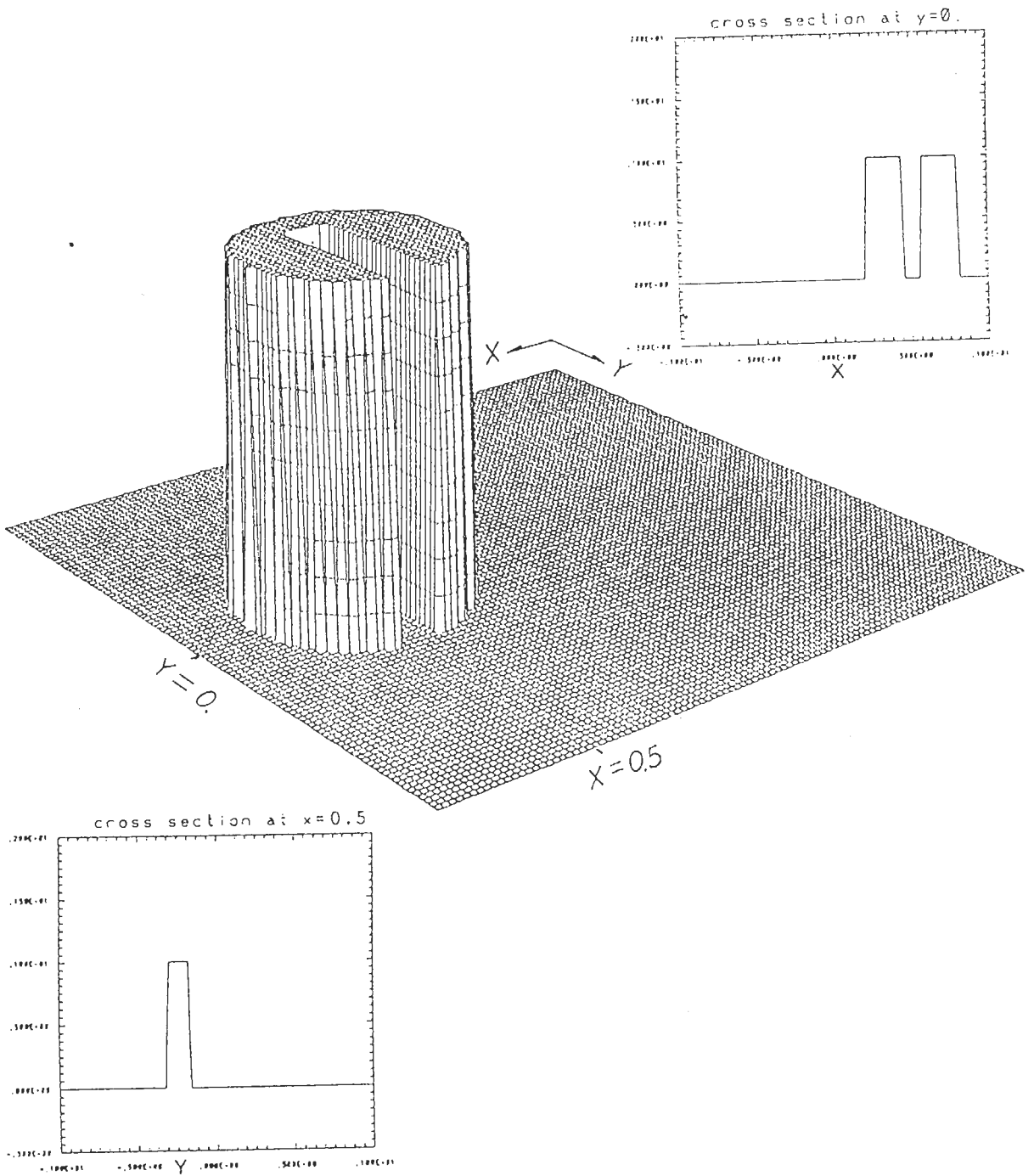


圖1 幣形圓柱的初始場，圓柱中心位於  $(0.5, 0)$ ，研究範圍  $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ ，右上角為  $y = 0$  的垂直剖面圖，左下角為  $x = 0.5$  的垂直剖面圖。

• 高斯波之形式為

$$\psi(x, y, t = 0) = e^{-25[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]}. \quad (11)$$

研究範圍  $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ ,  $(x_0, y_0) = (-0.3, -0.3)$ , 網格點數為  $33 \times 33$ 。

• 餘弦波之形式為

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t = 0) &= \frac{A_0}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi R}{n\Delta x}\right) & R \leq n\Delta x \\ &= 0. & R > n\Delta x \end{aligned} \quad (12)$$

這裏  $A_0 = 100$ ,  $R^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$ ,  $n$  為整數,  $2 \leq n \leq 6$ , 研究範圍  $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ ,  $(x_0, y_0) = (-0.5, 0)$ , 網格點數為  $33 \times 33$ 。

• 幣形圓柱之形式為

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t = 0) &= 1 & R \leq 15\Delta x \\ &= 0 & R > 15\Delta x \\ &= 0. & |x - x_0| \leq 3\Delta x, y - y_0 \geq -9\Delta x \end{aligned} \quad (13)$$

$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$  圓柱的半徑為  $15\Delta x$ , 缺口的寬度為  $6\Delta x$ , 深度為  $9\Delta x$  (見圖1), 研究範圍  $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ ,  $(x_0, y_0) = (0.5, 0)$ , 網格點數為  $101 \times 101$ 。

我們以一有等角速度的圓形風場來探討 (見圖2a), 角速度  $\omega = 1/\sqrt{2}$ ,  $u = -\omega y, v = \omega x$ , 此為最簡單之非輻散多維風場, 其被廣泛使用於數值平流之計算研究。最大風速  $|\vec{V}_{max}| = 1$ ,  $\Delta t = 1/160$ , 繞一圈須 1421 積分次數, 所用的最大 CFL 數 ( $C$ )  $\sim 0.14(0.1 \times \sqrt{2})$ 。圖2a中, 高斯波形的中心點  $(x_0, y_0) = (-0.3, -0.3)$  在分析範圍的左下角, 和邊界尚有一段距離, 受邊界的影響較少, 邊界條件全部設定為零。

Smolarkiewicz法擁有預報與校正兩階段, 在校正階段利用泰勒級數, 導出反擴散的過程, 以重新聚集預報階段(上游法)所擴散出去的質量, 以減少極大值之衰減。以不同泰勒級數之階數求反擴散速度, Smolarkiewicz法可分二(低)階法(SML)和三(高)階法(SMH)。Hsu和Arakawa(1990)在等熵座標中模擬斜壓不穩定時, 為了避免零質量層中產生負質量點, 使用改良Takacs(1985)法為正定義數值方法。詳細有關Smolarkiewicz法與Hsu-Arakawa法, 請參考Smolarkiewicz(1983)與Hsu和Arakawa(1990), 這些方法一維的定差方程也可見郭和柳(1994)。Smolarkiewicz(1984)文中三維公式的推導有誤, 正確的式子請見柳(1993), 或柳和郭(1994)。Hsu和Arakawa(1990)只提供一維方程, 其法的二維定差方程, 也請見柳(1993)。

### 三、結果與討論

#### (一) 高斯波之探討

半拉格朗日法在圓形風場理想環境的探討中, 可以使用相當大的時距, 圖2b為半拉格朗日法高斯波繞一圈 CFL 數 = 35.5。在如此大的 CFL 數之下, 波形只須積分四次即可繞一圈, 波形

中心值 0.986 衰減很少，然而波形位置和初始位置（見圖 2a）相差很大，並往上游方向偏移。半拉格朗日法因不受穩定度的限制可以用很大的時距，然而時距愈大軌跡就愈複雜，(3)、(4) 二式採用中間點原理，軌跡中間點的風場常無法代表整個軌跡，當時距很大時，以軌跡中間點風場來平流的結果，相位的誤差也愈大。圖 2a 每積分一次要移行九十度，其中間點的風速遠小於實際風速，所以有相位落後的情形。在這種圓形風場的探討中，時距愈大，相位落後的角度愈大。Pudykiewicz 及 Staniforth (1984) 也指出其結果 CFL 數=4 及 10，各有 6 度及 11 度的相位落後（其文是以餘弦波探討）。圖 2c 及圖 2d 各為 CFL 數=10 及 1 高斯波繞一圈的結果，中心極大值各為 0.979 和 0.95。CFL 數愈大，繞一圈積分次數愈少，內插次數也愈少，中心極大值保持也愈好。圖 3 清楚的指出時距大小的誤差和內插的累積誤差，彼此消長的情形。 $x$  軸是波形繞一圈的積分次數由四次至一百次，當次數少時，時距愈大，相位誤差大導致精確度降低，隨著次數增加時距變小，誤差也隨之降低（精確度增加），之後次數較多，時距較小，相位很正確，然而內插累積的誤差開始明顯（波形中心極大值降低），RMS 誤差又告上升。誤差最小（精確度最高）約位於  $x = 52$ ，其 CFL 值約為 2.73。圖 4 是半拉格朗日法的收斂情形，A、B、C、D 線各是 CFL 數=10、4、2、1。 $x$  軸指在一定範圍內分析點數由 16 點增加到 64 點，點數愈多解析度愈高，誤差愈小曲線要收斂下降（如 D 線），然而 A 線使用過大的時距，時距誤差導致相位誤差過大，當解析度增加也無法改善精確度（曲線持平不下降），B、C 線則是空間誤差的變小只能改善到某種程度，之後曲線仍變平不再下降。

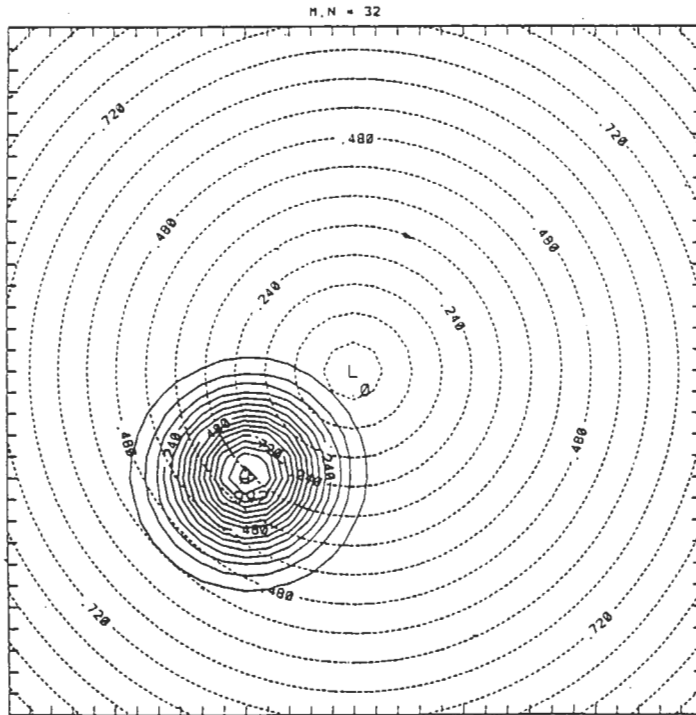


圖 2 (a) 等角速度 ( $\omega = 0.5$ ) 的圓形風場及高斯波形的初始位置，波形中心  $(x_0, y_0) = (-0.3, -0.3)$ ，研究範圍  $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ ， $|\vec{V}_{max}| = 1$ 。

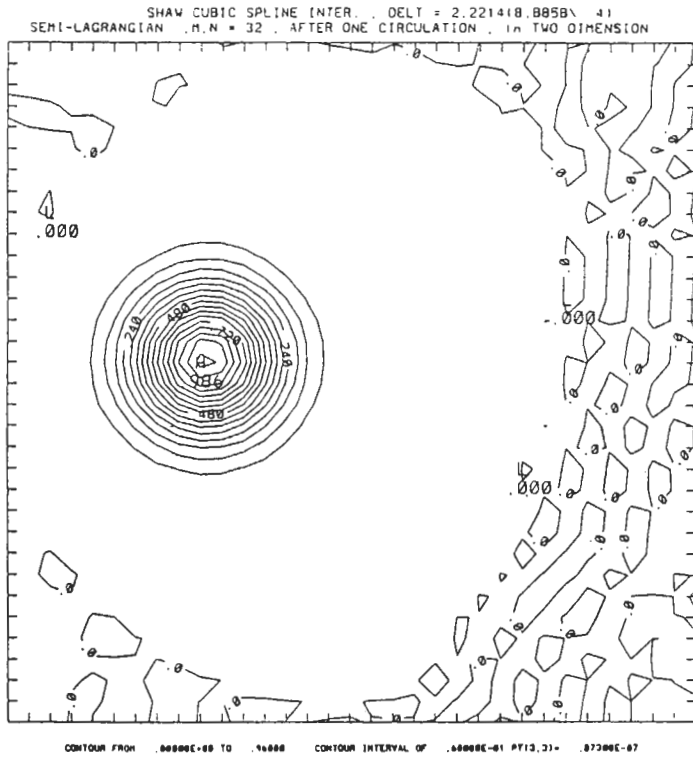


圖2 (b)半拉格朗日法 CFL 數=35.5 高斯波形繞一圈的結果。

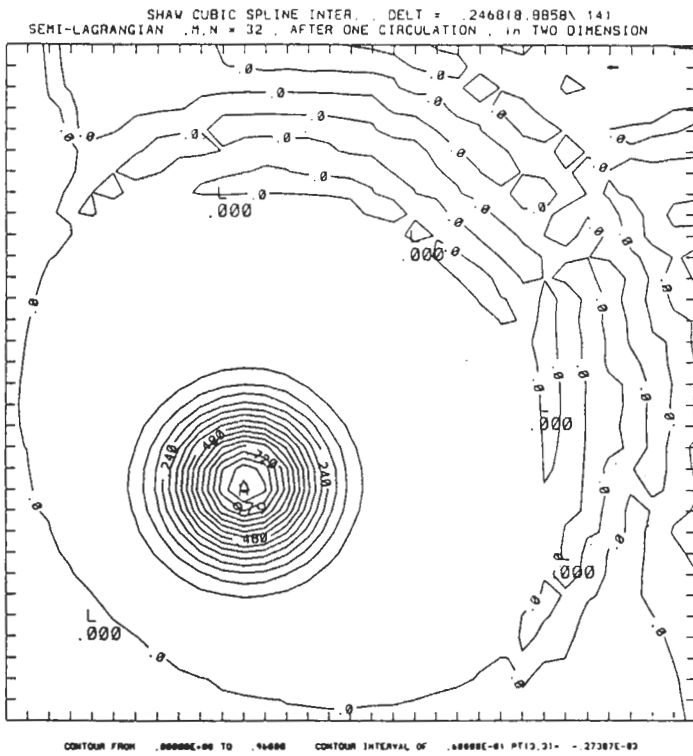


圖2 (c)和圖2b同，唯 CFL 數=10。



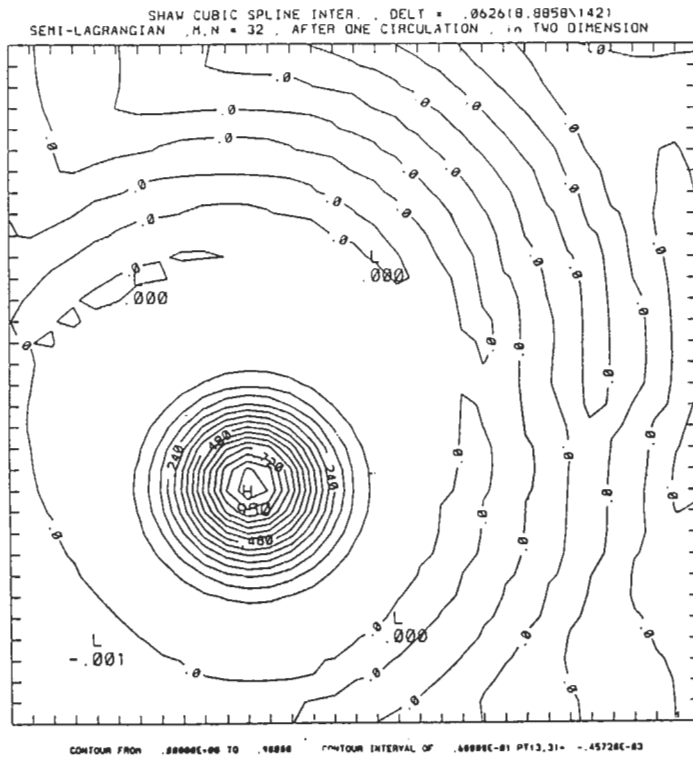


圖2 (d)和圖2b同，唯CFL數=1。

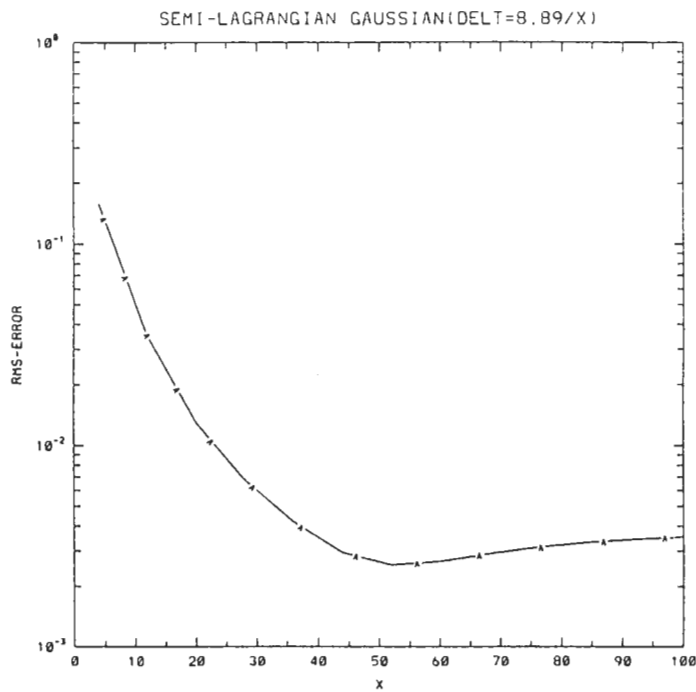


圖3 半拉格朗日法高斯波繞一圈的結果，x軸指繞一圈所用的積分次數。

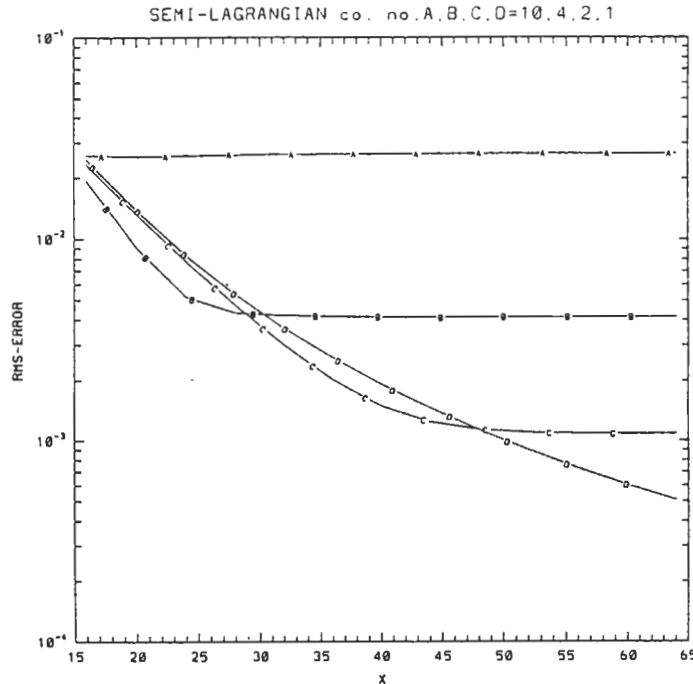


圖4 半拉格朗日法高斯波繞一圈的收斂探討，A、B、C、D線分別為CFL數=10、4、2、1。 $x$ 軸指在固定範圍內，所取的點數，如 $x = 32, \Delta x = 1/16, x = 64, \Delta x = 1/32$ 。

圖5a是SML2高斯波形繞一圈的結果，中心強度由原來的1降至0.702，中心位置往上游偏移，和一維探討得相同的結論（見郭和柳1994）。圖5b是SMH3高斯波形繞一圈的結果，波形中心強度為1.01，有些許1%的過量(over-shoot)。和SML2的最大不同點是SMH3的相位沒有偏移，且圖5a及5b除波形所在位置外，完全沒有雜紋，是真正的正定義法。Hsu-Arakawa法是一三階非線性平流方法，其高斯波繞一圈的結果見圖5c(為HA)，相位沒有偏移的現象，中心強度為0.718比SML2(圖5a)(0.702)有稍好的精確度，然而兩種方法的振幅，都存有相當明顯的衰減。另外，Hsu-Arakawa法高斯波形旁有些許雜訊，不若Smolarkiewicz法非常潔淨沒有雜波。圖5d是FD4高斯波繞一圈的結果，波形中心值0.949，消散很少，相位偏移也很少，然而周圍的雜波很多，高斯波形旁邊有達 $-10^{-2}$ （原波形極大值之1%）的負值產生。

圖6是集合本文中所探討的各數值方法之收斂結果，A線是上游法，B線是SML2，C線是SMH3，D線是HA，E線是FD4，F線是半拉格朗日法CFL數=1。半拉格朗日法有遠優於各方法的精確度（不論在低解析度或是高解析度），大致來說E及F線（FD4及半拉法）屬同一等級四階精確度的方法。圖7是半拉格朗日法高斯波繞一圈波形中心極大值維持的情形。A、B、C、D線分別為CFL數=10、4、2、1，內插次數愈多，波形中心值衰減也就愈多，CFL數愈大，波形中心極大值維持得愈好。A線（CFL數=10）對於 $3.8\Delta x$ 以上的波數就能維持90%以上的極值，B線（CFL數=4）為 $4.4\Delta x$ 以上，C、D線（CFL數=2、1）大約為 $5.2\Delta x$ 以上的波數就能維持極值90%以上。圖8是各方法高斯波形繞一圈後，極大值的維持情形，A線上游



ARAKAWA METHOD .M.N = 32 . AFTER ONE CIRCULATION . IN TWO DIMENSION

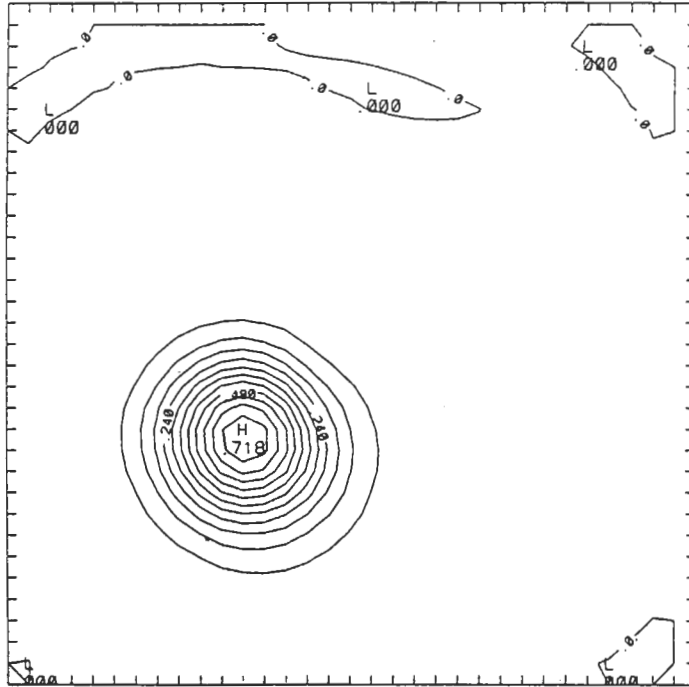


圖5 (c) HA 高斯波形繞一圈的結果。

C-GRID .M.N = 32 .ORDER = 4 .FLUX = 4 .AFTER ONE CIRCULATION .METHOD 5

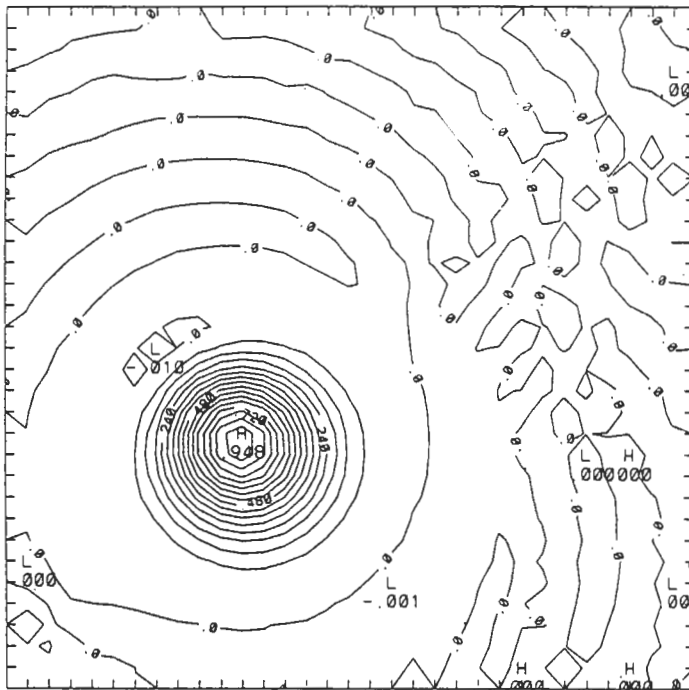


圖5 (d) FD4 高斯波形繞一圈的結果。

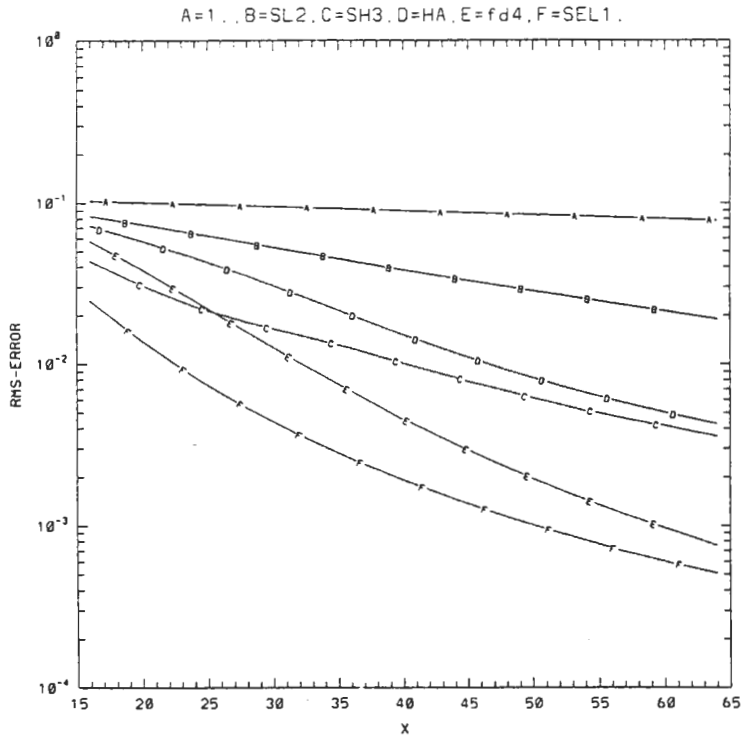


圖6 高斯波繞一圈的收斂探討。A線是上游法，B、C線分別是SML2(B)、SMH3(C)，D線是HA，E線是FD4，F線是半拉格朗日法CFL數=1。x軸所指，如圖4。

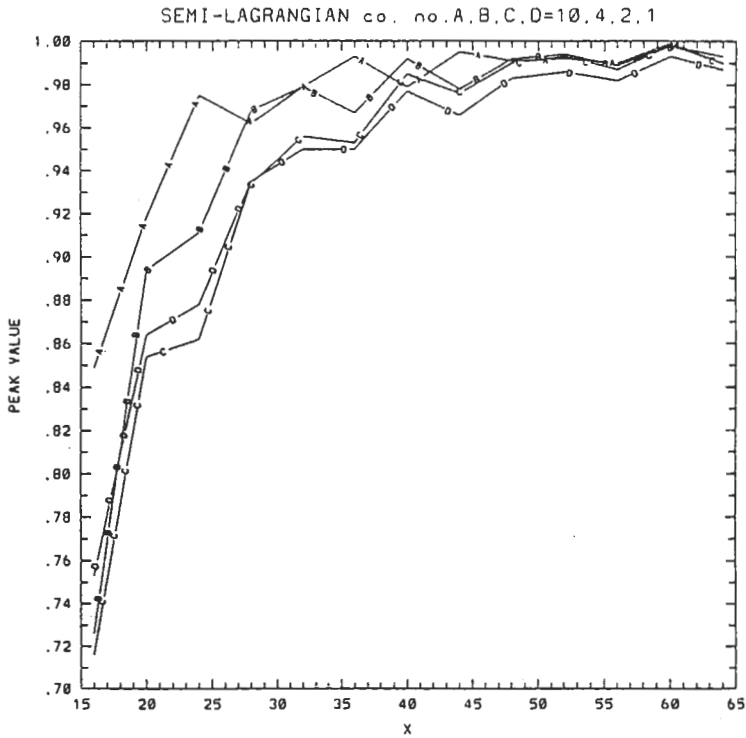


圖7 高斯波繞一圈後的中心極大值，各線所指的方法及x軸所指，如圖4。

法，B、C線分別為SML2、SMH3，D線是HA，E線是FD4，F線是半拉格朗日法CFL數=1。C、E、F線(SMH3、FD4、半拉格朗日法CFL數=1)三線對 $5\Delta x$ 以上的波形尚能維持90%以上的極大值，B、D線(SML2、HA)則須 $10\Delta x$ 以上的波形才能維持90%以上的極大值，上游法(A線)在我們的研究裏都無法維持波形中心極大值在90%以上。表1是各平流方法對高斯波繞一圈及五圈的一些數值統計資料，取格點數 $33 \times 33$ ，波形中心在 $(-0.3, -0.3)$ 。除半拉格朗日法外，Smolarkiewicz法，Hsu-Arakawa法(HA)，四階定差法的CFL數都小於1，需要遠較半拉格朗日法為多的積分次數。在高斯波形繞一圈極大值的維持方面，半拉格朗日法及SMH3都可以維持高斯波形中心極值在95%以上，SMH3有些微(0.7%)過量。HA對高斯波形中心極大值的維持略優於SML2。在高斯波形繞一圈後最小值方面，SML2及SMH3都是Smolarkiewicz法(Smolarkiewicz 1983)，是全然正定義法，沒有負值產生。半拉格朗日法的負值不超過0.1%，負值的大小是內插次數累積而來，內插次數愈多(CFL數愈小)負值愈大。FD4的負值大小約1%，HA的負值小得可以忽略(在Konor的博士論文(1992)中，應用FCT控制通量大小的觀念，Hsu-Arakawa法不再產生負值)。 $\Sigma\psi/\Sigma\psi_0$ 是質量保守的情形，高斯波形繞一圈後，半拉格朗日法及FD4的質量保守極佳達0.999以上。Smolarkiewicz法也可以有0.99以上。HA略遜但也有0.986。 $\Sigma\psi^2/\Sigma\psi_0^2$ 是能量維持情形，和波形極值及質量保守相關。在高斯波形繞一圈後，半拉格朗日法的能量維持0.98以上，全部的Smolarkiewicz法(本文所探討的)都無法達0.9以上。HA因極值優於SML2，所以能量保守HA比SML2好。 $\sigma/\sigma_0$ 是各方法在數值頻散的情形。在高斯波形繞一圈後，表中所探討的各數值平流方法都有頻散的現象，半拉格朗日法及FD4之 $\sigma/\sigma_0$ 可達0.99。

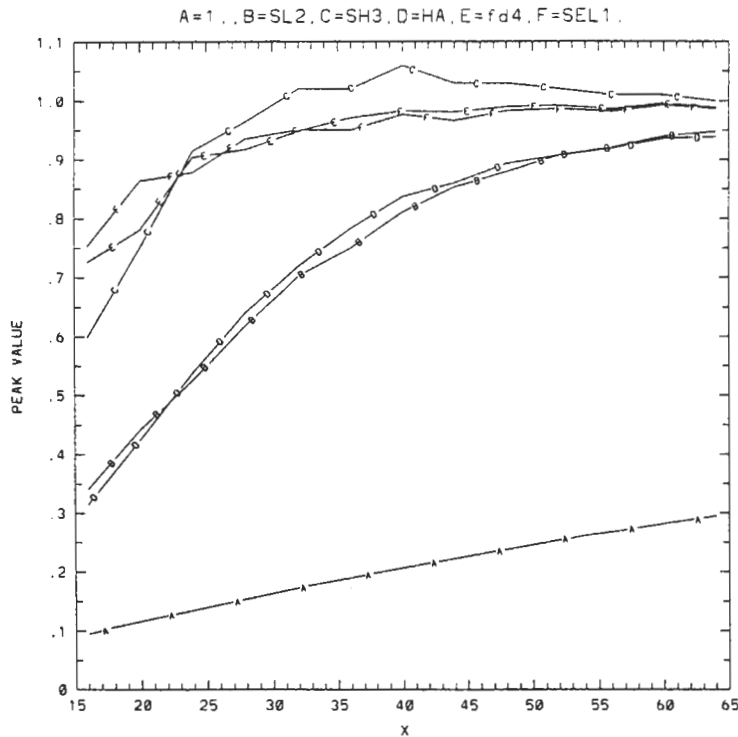


圖8 高斯波繞一圈後中心極大值的維持情形。A線是上游法，B、C線分別是SML2、SMH3，D線是HA，E線是FD4，F線是半拉格朗日法CFL數=1。x軸所指，如圖4。

綜合表一高斯波形繞一圈的部分，由 $\Sigma\psi/\Sigma\psi_0$ 、 $\Sigma\psi^2/\Sigma\psi_0^2$ 、 $\sigma/\sigma_0$ 各欄的數字顯示，在不考慮產生計算負值的情形下，半拉格朗日法及FD4優於Smolarkiewicz法，Hsu-Arakawa法。半拉格朗日法所產生的負值在Willamson及Rasch (1989)，Bermejo及Staniforth (1992)和Priestley (1993)等人的文章中已不存在。半拉格朗日法中CFL數愈小，須內插的次數愈多，所累積的誤差愈大（各欄的數字也指出精確度降低）。由表中數字也顯示SMH3優於Hsu-Arakawa法(HA)，表中各欄數字似乎指出HA和SML2結果約相等（表一中各欄數字不能表現出相位的誤差，實際上HA相位誤差較SML2為小。RMS誤差同時包含有相位的誤差、衰減及頻散的誤差，圖6早已指出SML2是二階精確度，而HA是三階精確度的方法），表一不能指出相位誤差的情形是一缺點（此表的格式根據Pudykiewicz和Staniforth 1984）。FD4有近乎1%的負值存在。表一下半部是高斯波繞五圈的數字資料，繞愈多圈衰減也愈多，HA由0.726降為0.435，相對的來說，半拉格朗日法的衰減很少，CFL數=10的部份由0.979只降為0.951，CFL數=1的部份，因內插較多，由0.95降為0.84，負值因內插較多上升接近1%。FD4中心極值0.949降為0.842，然而負值上升至10%。質量保守各方法都不錯至少有0.9，而能量保守方面，除半拉格朗日法及FD4外，因波形中心極值下降，能量保守大約在0.7以下。

表一 高斯波繞一圈及五圈，文中各平流方法的統計資料。

	C	$\psi_{max}$	$\psi_{min}$	$\frac{\Sigma\psi}{\Sigma\psi_0}$	$\frac{\Sigma\psi^2}{\Sigma\psi_0^2}$	$\frac{\sigma}{\sigma_0}$
一 圈						
SL	1	0.950	$-5.9 \times 10^{-4}$	0.9992	0.9782	0.9884
	2	0.956	$-5.0 \times 10^{-4}$	0.9992	0.9820	0.9904
	4	0.979	$-3.8 \times 10^{-4}$	0.9994	0.9929	0.9963
	10	0.979	$-1.6 \times 10^{-4}$	0.9999	0.9970	0.9984
SML2	$2^{-1}$	0.696	0	0.9916	0.6895	0.8192
SMH3	$2^{-3}$	1.007	0	0.9940	0.8525	0.9187
HA	$2^{-1}$	0.726	$-3.37 \times 10^{-7}$	0.9856	0.7050	0.8296
FD4	$2^{-4}$	0.949	$-7.29 \times 10^{-3}$	0.9999	0.9984	0.9992
五 圈						
SL	1	0.841	$-6.0 \times 10^{-3}$	0.9930	0.9106	0.9518
	2	0.861	$-3.4 \times 10^{-3}$	0.9956	0.9246	0.9594
	4	0.931	$-1.9 \times 10^{-3}$	0.9974	0.9669	0.9824
	10	0.951	$-7.8 \times 10^{-4}$	0.9993	0.9855	0.9923
SML2	$2^{-1}$	0.357	0	0.8999	0.3240	0.5418
SMH3	$2^{-3}$	0.730	0	0.9433	0.5659	0.7386
HA	$2^{-1}$	0.435	$-2.21 \times 10^{-7}$	0.8984	0.3951	0.6076
FD4	$2^{-4}$	0.842	-0.111	0.9999	0.9920	0.9957

所探討的各平流方法在高斯波的研究之下，顯示半拉格朗日法是一很優秀的方法，優於 Smolarkiewicz 法、Hsu-Arakawa 法及 FD4。但我們強調的重點是，從原理上就保證 Smolarkiewicz 法是一正定義法，不須額外處理負值。

## (二) 餘弦波之探討

Pudykiewicz 和 Staniforth (1984) 用餘弦波 (6) 式) 比較各種半拉格朗日法及波譜法。爲了採用其文中的表一，我們也進行餘弦波的探討。表二是餘弦  $4\Delta x$  波繞行一圈及五圈的數字統計資料，其中半拉格朗日法部份是抄錄 Pudykiewicz 和 Staniforth (1984) 的表一 (其  $\sigma/\sigma_0$  的值都大於 1，甚至 CFL 數=1 的  $\sigma/\sigma_0$  爲 1.43 是很值得懷疑。一般而言數值方法都會頻散，標準差  $\sigma$  都會變小， $\sigma/\sigma_0$  都會小於 1 (見表一高斯波探討的半拉格朗日法部份))。在如此解析度的  $\cos 4\Delta x$  波下，Smolarkiewicz 法及 Hsu-Arakawa 法中心極值的維持都不是很好，波形繞一圈後，HA 甚至只能維持 40% 和 SML2 38.5% 約相當，SMH3 則有 71.8%，FD4 有 88.7%。質量保守方面各方法都不錯至少有 0.98。波形繞五圈後，波形衰減很嚴重，HA 爲 19.5%，FD4 尚有 61.2%，半拉格朗日法仍是最佳的方法，CFL 數=1 的有 68%，CFL 數=10 的則能維持 95%。

表二  $\cos 4\Delta x$  波繞一圈及五圈, 文中各平流方法的統計資料。

	C	$\psi_{max}$	$\psi_{min}$	$\frac{\Sigma\psi}{\Sigma\psi_0}$	$\frac{\Sigma\psi^2}{\Sigma\psi_0^2}$	$\frac{\sigma}{\sigma_0}$
一圈						
SL	1	90	-2	1.001	0.91	1.43
	2	94	-1	1.000	0.93	1.28
	4	98	-1	1.000	0.97	1.17
	10	96	-0.5	1.001	0.99	1.09
SML2	$2^{-1}$	38.5	0	0.9886	0.327	0.558
SMH3	$2^{-3}$	71.8	0	0.9942	0.514	0.709
HA	$2^{-1}$	40	$-4.6 \times 10^{-7}$	0.9783	0.331	0.562
FD4	$2^{-4}$	88.7	-15.9	1.0091	0.9951	0.997
五圈						
SL	1	68	-4	1.006	0.73	2.14
	2	72	-2	1.004	0.78	1.77
	4	85	-1	1.004	0.88	1.47
	10	95	-0.5	1.000	0.94	1.25
SML2	$2^{-1}$	16.3	0	0.8456	0.121	0.326
SMH3	$2^{-3}$	37	0	0.92	0.239	0.474
HA	$2^{-1}$	19.5	$-2.3 \times 10^{-7}$	0.8392	0.146	0.363
FD4	$2^{-4}$	61.2	-21.4	1.0107	0.972	0.985



半拉格朗日法對於梯度大的現象有傑出的平流能力(Kuo和Williams 1990)，其他平流方法或許稍遜。因此我們放大 $\cos 4\Delta x$ 至 $\cos 5\Delta x$ 來探討各方法的表現。表三是 $\cos 5\Delta x$ 波繞行一至五圈的統計資料。在繞行一圈餘弦波中心極大值的維持部份。除了半拉格朗日法之外，表中各方法當所探討的問題由 $\cos 4\Delta x$ 改變為 $\cos 5\Delta x$ （由9點波增為11點波僅增加2點解析度），波形中心極值的維持都有改善，FD4由88.7%增為98.5%，SMH3由71.8%增為95%，HA由40%增為58.8%約和SML2由38.5%增為55.7%相當。當然半拉格朗日法中心極值更好了，只是其在 $\cos 4\Delta x$ （表二）的探討中，中心極值已達90%以上，所以在 $\cos 5\Delta x$ 的探討中進展有限。由表二及表三對照得知 $\cos 4\Delta x$ 波對Smolarkiewicz法及Hsu-Arakawa法(HA)是一個相當難平流的對象，原因在於點數太少，是一梯度相當大的現象。 $\cos 5\Delta x$ 波比 $\cos 4\Delta x$ 波之解析點數多了兩點，Smolarkiewicz法對 $\cos 5\Delta x$ 波的掌握就比 $\cos 4\Delta x$ 波好多了。而較之Smolarkiewicz法，Hsu-Arakawa法遜色很多，對分析點數較多的 $\cos 5\Delta x$ 波繞一圈，尚無法維持60%的中心極值，只有58.8%。表三中 $\cos 5\Delta x$ 波繞五圈的部份，Smolarkiewicz法及Hsu-Arakawa法呈現大幅度的衰減(SMH3剩55%，HA僅剩30%)，相對的半拉格朗日及FD4衰減很小，半拉格朗日法CFL數=1有81.7%，CFL數=10則為98.3%，FD4也有80%。

表三  $\cos 5\Delta x$ 波繞一圈及五圈,文中各平流方法的統計資料。

	C	$\psi_{max}$	$\psi_{min}$	$\frac{\Sigma\psi}{\Sigma\psi_0}$	$\frac{\Sigma\psi^2}{\Sigma\psi_0^2}$	$\frac{\sigma}{\sigma_0}$
一圈						
SL	1	96.7	-1.94	1.0006	0.9520	0.9747
	2	97.8	-1.46	1.0011	0.9669	0.9826
	4	98.9	-0.83	1.0005	0.9852	0.9923
	10	99.2	-0.62	1.0000	0.9940	0.9969
SML2	$2^{-1}$	55.7	0	0.9854	0.4760	0.6760
SMH3	$2^{-3}$	95	0	0.9917	0.6792	0.8170
HA	$2^{-1}$	58.8	$-4.46 \times 10^{-7}$	0.9745	0.4864	0.6845
FD4	$2^{-4}$	98.5	-7.71	0.9988	0.9966	0.9983
五圈						
SL	1	81.7	-3.26	1.0016	0.8278	0.9061
	2	86.8	-2.24	1.0004	0.8715	0.9309
	4	93.8	-1.51	1.0028	0.9362	0.9662
	10	98.3	-0.98	1.0069	0.9726	0.9854
SML2	$2^{-1}$	25.1	0	0.8410	0.1848	0.4059
SMH3	$2^{-3}$	54.9	0	0.9128	0.3550	0.5801
HA	$2^{-1}$	30.1	$-2.19 \times 10^{-7}$	0.8346	0.2234	0.4529
FD4	$2^{-4}$	80.3	-17.8	1.0210	0.9831	0.9903

圖9是餘弦波繞一圈的收斂探討，A、B線是半拉格朗日法CFL數=10及2，C、D線分別是SML2、SMH3，E線是HA，F線是FD4。 $x$ 軸指 $\cos x \Delta x$ ，如 $x = 2$ 為 $\cos 2\Delta x$ 只有5點的解析度， $\cos 6\Delta x$ 則有13點的解析度。在收斂速度方面，半拉格朗日法CFL數=2(B線)和FD4(F線)呈現相同最佳的收斂速率，SMH3(D線)和HA(E線)再次之，半拉格朗日法CFL數=10是最不好的(相位的誤差使其收斂探討無法收斂下降)(Pudykiewicz和Staniforth 1984文中也有類似的結果)。圖10和圖9約同唯是餘弦波形中心極值。要維持餘弦波形中心極值達90%以上，半拉法CFL數=10(A線)最好，只須有5.5點解析的餘弦波，半拉格朗日法CFL數=2(B線)次之為7.5點，FD4(F線)再次之為8.2點，HA(E線)及SML2(C線)在研究範圍內尚無法達90%。圖10中我們要指出的是半拉格朗日法CFL數=10(A線)因為內插次數較少，所以餘弦波形中心極值維持最佳，然而其時距使用過大，有明顯相位的誤差(見圖9)不具實際使用的價值。

在餘弦波如此較高斯波斜率為大的平流對象下，半拉格朗日法對強梯度較能維持的優點顯露無遺，FD4次之，Smolarkiewicz法再次之，Hsu-Arakawa法表現不佳。值得提出的是，FD4產生的負值大小不可忽略(繞一圈時，表二有16%，表三也有7.7%)，而正定義法不會產生負值。

### (三)幣形圓柱之探討

幣形圓柱的初始場見圖1，原點(0,0)在圖中心，範圍 $(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]$ ，右上角為 $y = 0$ 的垂直剖面圖，左下角為 $x = 0.5$ 的垂直剖面圖。幣形圓柱是一相當難以維持的研究對象，它擁有太多不連續的部份。高斯波是一理想的連續體，餘弦波只有底部的不連續部份，(這部份的不連續因為在底部，似乎對各種平流方法都沒有造成影響)，所以我們文中所探討的各方法，有能力表現很好(至少增加解析度一定可以維持波形良好)。而本節中所探討的幣形圓柱是一極端不連續體(首見Zalesak, 1979)，各方法對其平流模擬，我們預期有和前兩節全然不同的結果。

圖11及12是半拉格朗日法幣形圓柱繞一圈的結果，CFL數分別為1及10。圖12因時距採用過大，相位有明顯落後的情形，CFL數=1的圖11，其相位很好。因為幣形圓柱的不連續部份，造成半拉格朗日法的結果有過量及負值(over-shoot和under-shoot)的情形，幣形缺口底部原為零之處全變為負值，圓柱周圍也全變為一圈負值。圖13、14分別是SML2及SMH3。圖13在 $x = 0.5$ 的剖面指出，SML2無法維持幣形缺口，值原為1的部份減為不及0.625，值原為0的底部被填高，最大超過0.375，幣形缺口原為平坦的底部嚴重的被填高。SMH3比SML2好很多(見左下角的 $x = 0.5$ 的剖面)，幣形缺口的底部被填積的高度小於0.19，原為1的部份仍有0.94左右。 $y = 0$ 的剖面指出，Smolarkiewicz法都有過量(超過原值)的現象。圖15是Hsu-Arakawa法，幣形缺口底部填積的高度約0.25左右，原為1的值尚有0.75左右。HA比SML2表現好，但不如SMH3。圖16是FD4，線性的四階定差方程，對如此不連續的幣形圓柱毫無平流能力。

表四是各方法對幣形圓柱繞一圈及五圈的統計資料。極大值指出各方法至少有10%以上過量的情形。極小值部份，半拉格朗日法的負值高達10%以上，而Smolarkiewicz則仍是正定義法。質量維持部份，數據指出各方法對如此不連續形體的質量維持仍很好。RMS誤差方面，半拉格朗日法仍是最好的，SMH3次之。

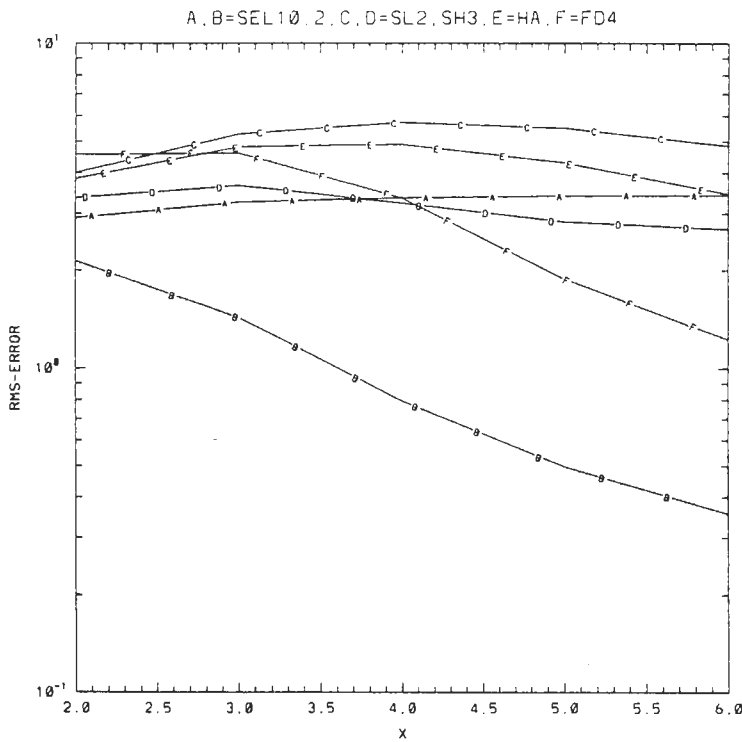


圖9 餘弦波繞一圈的收斂探討。A、B線分別是半拉格朗日法 CFL 數=10 及 2，C、D線分別是 SML2、SMH3，E線是 HA，F線是 FD4。x 軸所指，如圖 4。

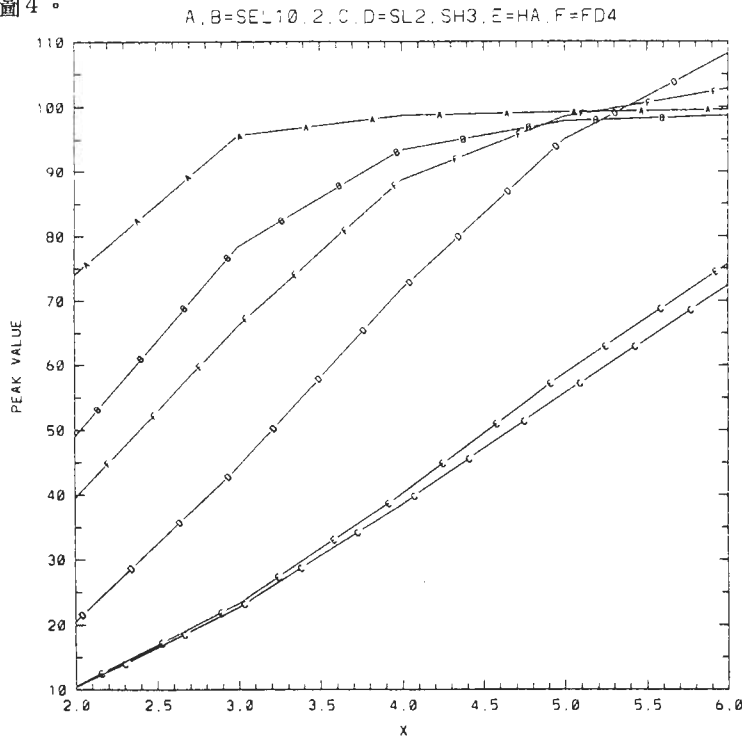


圖10 餘弦波繞一圈後的中心極大值，各線所指的方法如圖 9。x 軸所指，如圖 4。

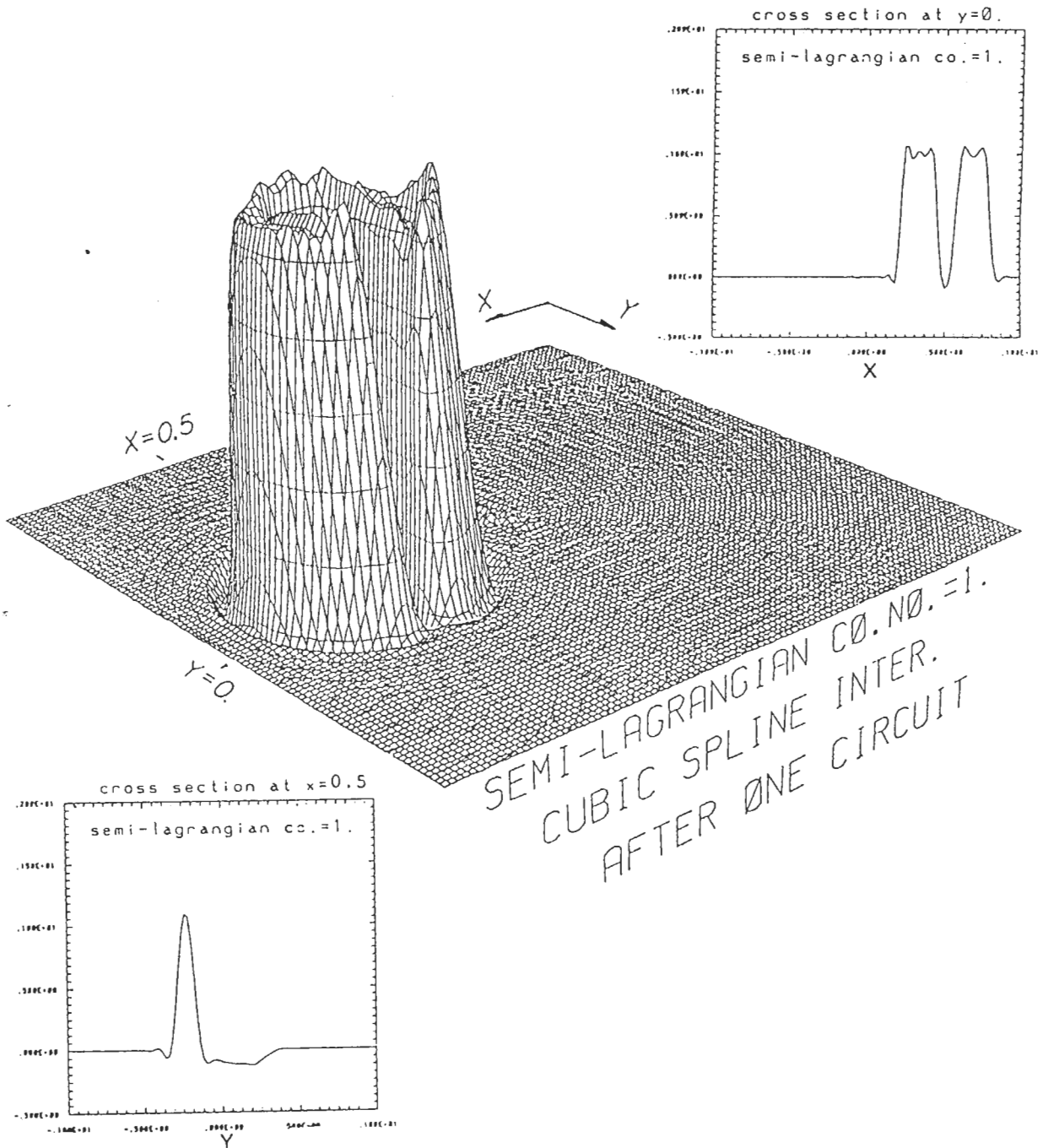


圖 11 半拉格朗日法 CFL 數 = 1 幣形圓柱繞一圈的結果，幣形圓柱的初始場位於  $(0.5, 0)$ ，研究範圍  $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ ，右上角為  $y = 0$  的垂直剖面圖，左下角為  $x = 0.5$  的垂直剖面圖。

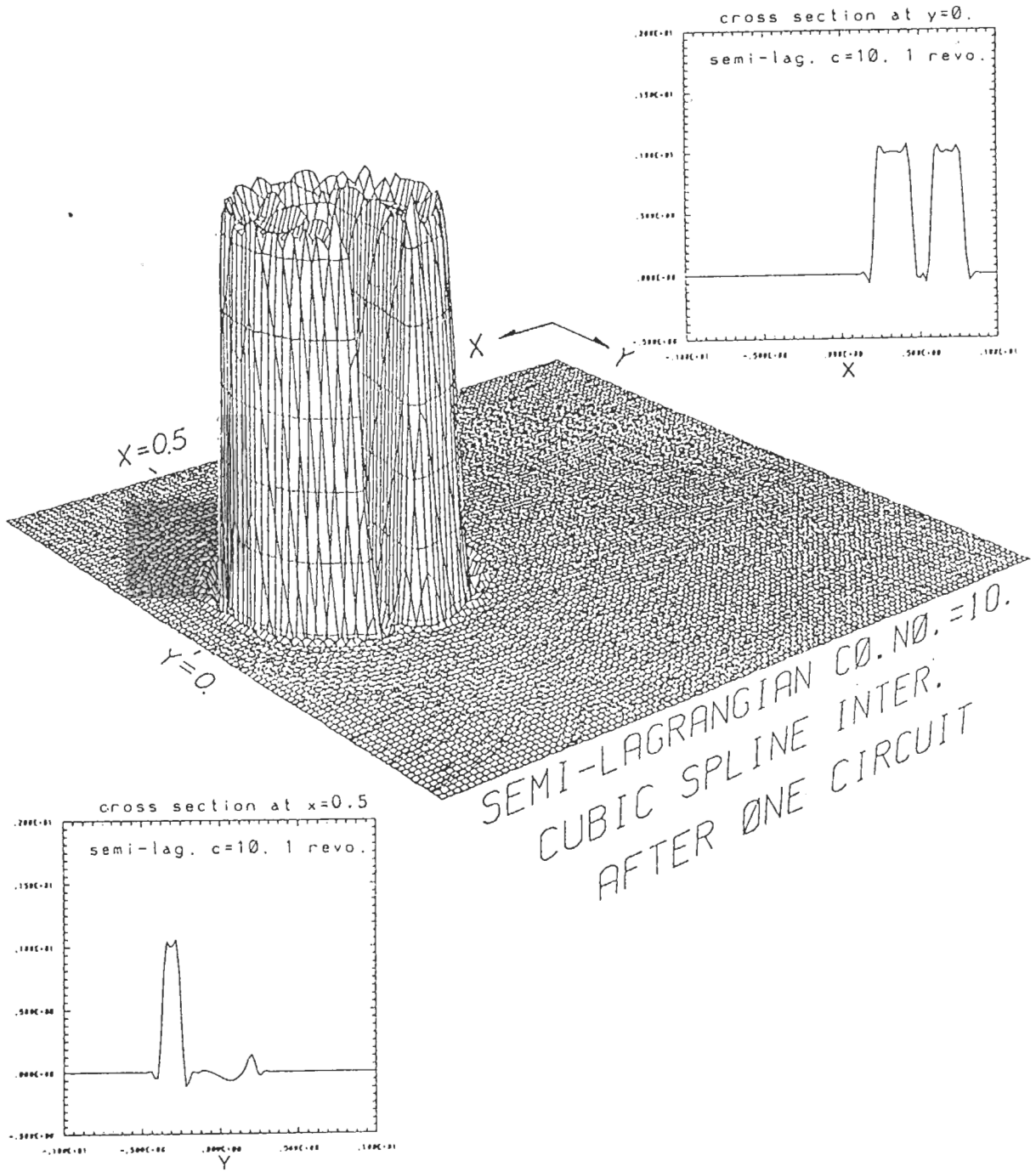


圖12 和圖11同，唯是半拉格朗日法 CFL 數=10。

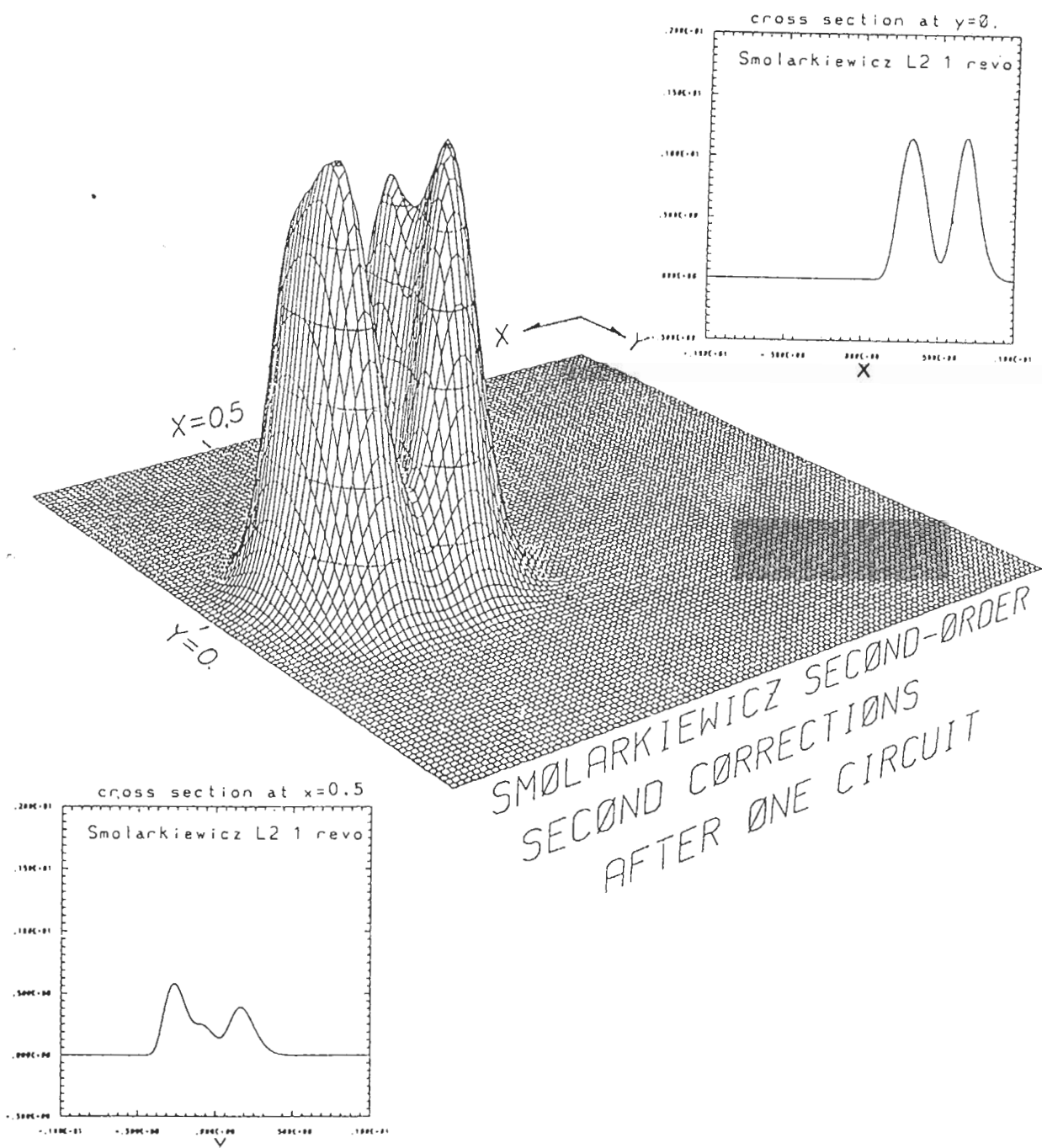


圖 13 和圖 11 同，唯是 SML2。

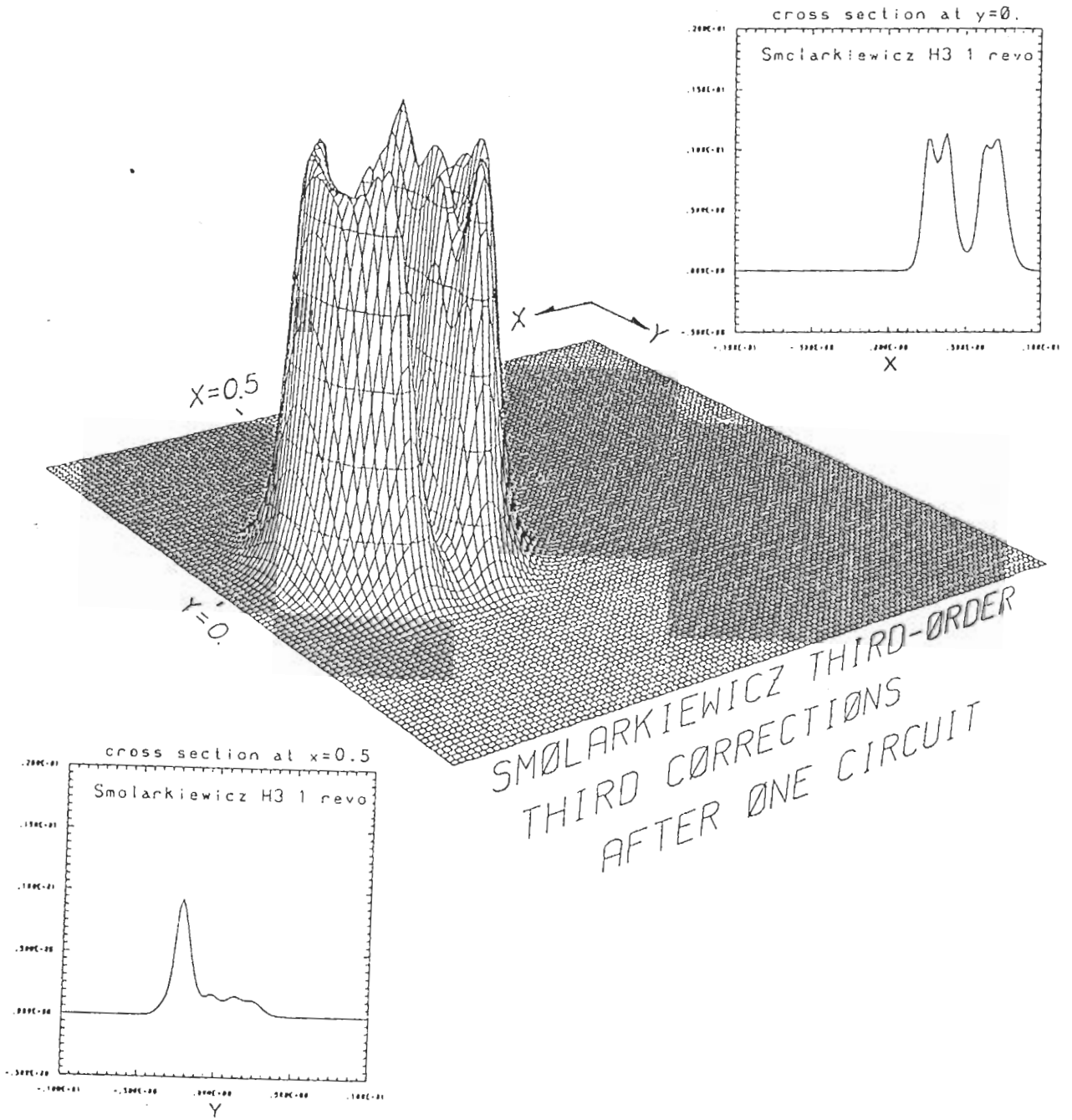


圖14 和圖11同，唯是SMH3。

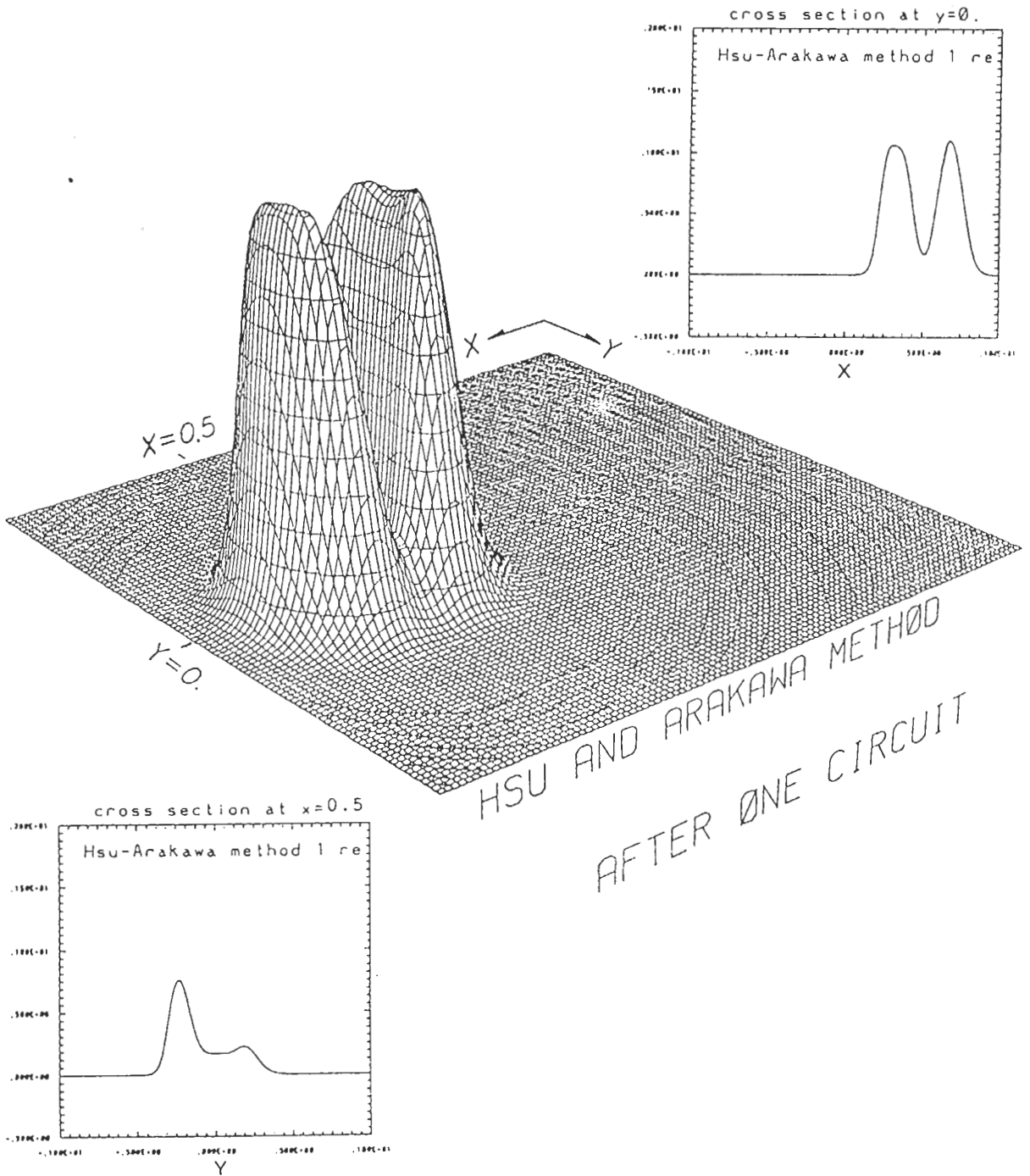


圖 15 和圖 11 同，唯是 Hsu-Arakawa 法 (HA)。



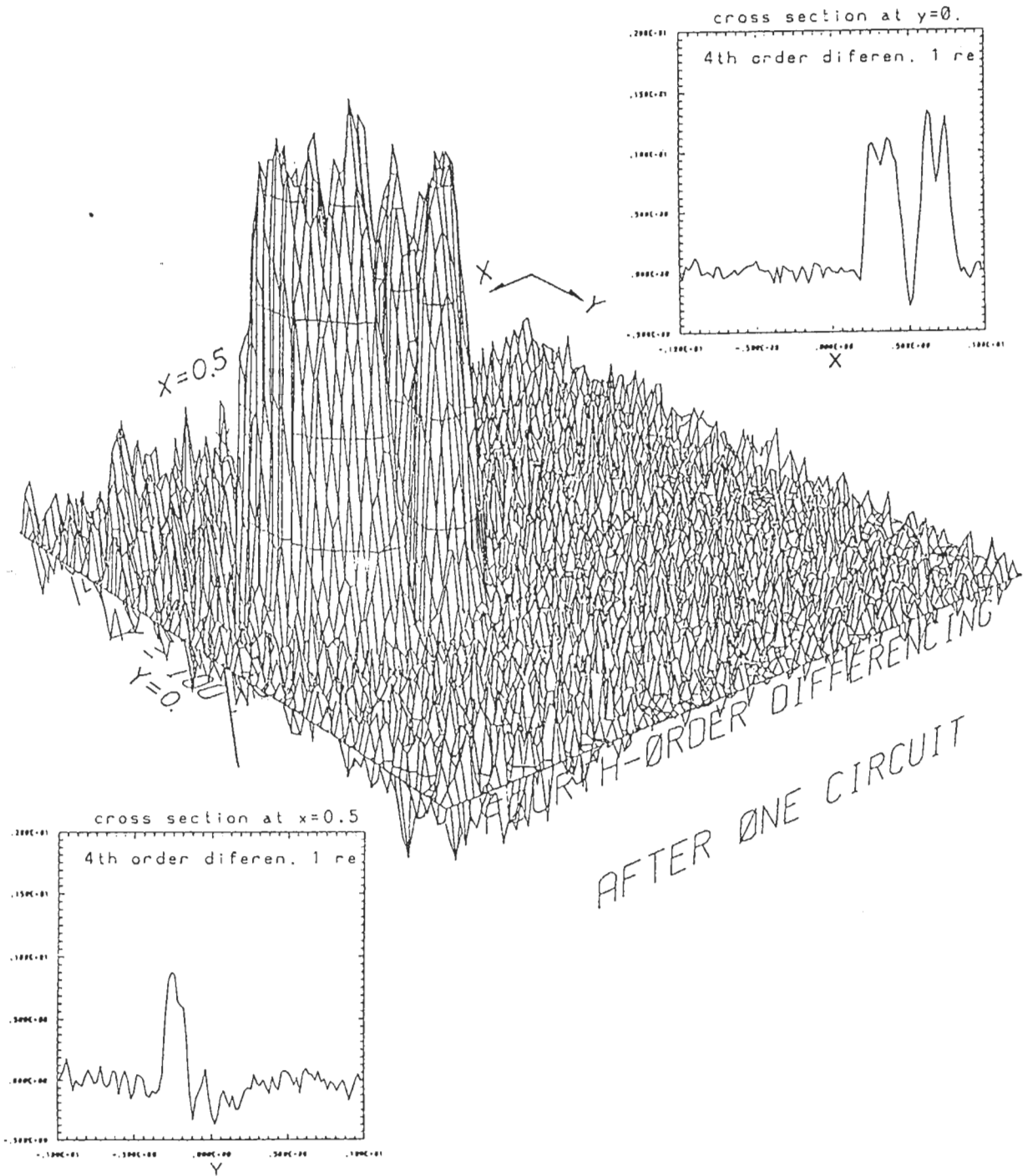


圖16 和圖11同，唯是FD4。

表四 幣形圓柱繞一圈及五圈,文中各平流方法的統計資料。

	C	$\psi_{max}$	$\psi_{min}$	$\frac{\Sigma\psi}{\Sigma\psi_0}$	$\frac{\Sigma\psi^2}{\Sigma\psi_0^2}$	$\frac{\sigma}{\sigma_0}$	RMS 誤差
一圈							
SL	1	1.14	-0.13	1.0000	0.9083	0.9502	0.0592
	2	1.12	-0.16	1.0000	0.9155	0.9542	0.0563
	4	1.14	-0.12	1.0000	0.9310	0.9628	0.0504
	10	1.15	-0.13	1.0000	0.9466	0.9713	0.15
SML2	$2^{-1}$	1.21	0	0.9998	0.7025	0.8277	0.1
SMH3	$2^{-3}$	1.23	0	0.9999	0.7719	0.8710	0.085
HA	$2^{-1}$	1.12	$-6.4 \times 10^{-7}$	0.9998	0.7262	0.8427	0.088
FD4	$2^{-4}$	1.47	-0.49	1.015	1.017	1.0081	0.1
五圈							
SL	1	1.14	-0.11	1.0000	0.8508	0.9176	0.0715
	2	1.11	-0.09	0.9999	0.8652	0.9259	0.0679
	4	1.13	-0.13	1.0000	0.8942	0.9423	0.0626
	10	1.11	-0.17	1.0000	0.9170	0.9551	0.79
SML2	$2^{-1}$	1.07	0	0.9921	0.5531	0.7266	0.136
SMH3	$2^{-3}$	1.24	0	0.9966	0.6678	0.8054	0.11
HA	$2^{-1}$	1.10	$-1.08 \times 10^{-6}$	0.9967	0.6149	0.7699	0.11
FD4	$2^{-4}$	1.85	-2.06	1.0094	2.018	1.4412	0.26

#### 四、結論

最近 Bermejo 和 Staniforth (1992)、Priestley (1993) 用 FCT 的觀念控制通量的大小值之計算過程, 使半拉氏法的平流結果沒有過量及負值(文中的內插仍是使用尋常之三次內插)。兩篇文章中均舉幣形圓柱為平流的對象, 說明一般的半拉格朗日法對於較不連續的現象, 所產生的負值及過量都有 10% 以上, 是不可忽視, 也由此來說明, 他們所提出之單調保守 (monotone conservative) 半拉格朗日法的重要性。Williamson 和 Rasch (1989) 是使用他們所發展出來的 Hermite 三次內插來取代尋常的三次內插, 使得被平流的物體能維持形體 (shape-preserving), 這是另外一種沒有過量及負值的半拉格朗日法, 都是指出半拉格朗日法因尋常的三次內插, 所產生不合理的負值或過量的值, 不是小得可忽略。在我們上一節的探討中, 也深切了解到負值與過量的嚴重性, 在高斯波及餘弦波較連續性的對象, 平流後的負值只有幾個百分比, 而對於很不連續的幣形圓柱, 平流後的過量及負值的大小都有 10% 以上。

半拉格朗日法使用過大的時距, 會因為所採用的平流風場無法來代表整個軌跡, 所以平流結果相位會有誤差。而半拉格朗日法最讓人喜歡採用之處, 是它時距大小的採用是根據精確度高

低的需求，不是像歐勒法時距大小的選用受限於穩定度（時間的誤差遠小於空間的誤差）。因為相位的誤差，半拉格朗日法時距的大小不能無限制的放大，使用者可以根據自己精確度的要求來決定。另外當使用較小時距（比上一般歐勒法的時距仍是很大）的半拉格朗日法時，因為內插次數的增加仍是會減低精確度。時距太大相位不準精確度降低，時距太小內插誤差累積精確度也會降低，因此如何選取適當的時距大小，以得到較高的精確度，是使用半拉氏法之前要先研究的（本文以高斯波探討的研究結果，最佳 CFL 數為 2.73）。

經高斯波、餘弦波及幣形圓柱的探討，數據上指出 HA 不如 SMH3，在某些程度上 HA 的結果近似 SML2。而在不考慮產生計算負值的情形下，我們的研究結果顯示，半拉格朗日法是最有效率、最精確的數值平流方法。但我們強調的重點是，Smolarkiewicz 正定義法不須額外處理負值，而 Hsu-Arakawa 法的負值小得可以忽略。

## 附錄：縮寫代號說明

FCT: flux-corrected transport。

FD4: 四階空間二階時間中差分法。

HA: Hsu-Arakawa 法。

SL: Semi-Lagrangian 法。

SM: Smolarkiewicz 法。

SML: Smolarkiewicz 二(低)階法(SM low order)。

SMH: Smolarkiewicz 三(高)階法(SM high order)。

SML2: Smolarkiewicz 二階法經二次校正(SML two corrective steps)。

SMH3: Smolarkiewicz 三階法經三次校正(SMH three corrective steps)。

## 誌謝

本文在國家科學委員會專案計劃 NSC84-2111-M-052-009 AP4 支援下完成。

## 參考文獻

柳再明，1993：正定義數值方法的探討。國立臺灣大學大氣科學所博士論文，300頁。

郭鴻基，柳再明，1994：正定義數值方法的探討。大氣科學，22，1-22。

柳再明，郭鴻基，1994：Smolarkiewicz 正定義數值方法中的交錯項。大氣科學，22，277-295

程家平，1987：正壓颱風路徑預報模式的改進-校驗與靈敏度測試。國立臺灣大學大氣科學研究所碩士論文，59頁。

Bates, J. R., 1984：An efficient semi-Lagrangian and alternating-direction implicit method for integrating the shallow water equations. *Mon. Wea. Rev.*, **112**,2033-2047.

Bates, J. R., and A. McDonald, 1982：Multiply-Upstream, semi-Lagrangian advective schemes: Analysis and application to a multilevel primitive equation model. *Mon. Wea. Rev.*, **119**,1831-1842.

Bermejo, R.,1990：On the equivalence of semi-Lagrangian schemes and particle-in-cell finite element methods. *Mon. Wea. Rev.*, **118**,979-987.

Bermejo, R., and A. Staniforth, 1992：The conversion of semi-Lagrangian advection schemes to quasi-monotone schemes. *Mon. Wea. Rev.*, **120**,2622-2632.

Book, D. L., J. P. Boris and K. Hain, 1975：Flux-corrected transport. II: Generalizations of the method. *J. Comput. Phys.*, **18**, 248-283.

- Boris, J. P., 1976 : Flux-corrected transport. III: Minimal-error FCT algorithms. *J. Comput. Phys.*, **20**, 397-431.
- Boris, J. P., and D. L. Book, 1973 : Flux-corrected transport. I: SHASTA, a fluid transport algorithm that works. *J. Comput. Phys.*, **11**, 38-69.
- Hsu, Y.-J., and A. Arakawa, 1990 : Numerical modeling of the atmosphere with an isentropic vertical coordinate. *Mon. Wea. Rev.*, **118**, 1933-1959.
- Konor, C. S., 1992 : Modeling studies of frontogenesis in the upper and middle troposphere. PHD. thesis, UCLA, 256pp.
- Kuo, H. C. and R. T. Williams, 1990 : Semi-Lagrangian solution to the inviscid burgers equation. *Mon. Wea. Rev.*, **118**, 1278-1288.
- McDonald, A., 1986 : A semi-Lagrangian and semi-implicit two-time-level integration scheme. *Mon. Wea. Rev.*, **114**, 824-830.
- Priestley, A., 1993 : A quasi-conservative version of the semi-Lagrangian advection scheme. *Mon. Wea. Rev.*, **121**, 621-629.
- Pudykiewicz, T. and A. Staniforth, 1984 : Some properties and comparative performance of the semi-Lagrangian method of Robert in the solution of the advection-diffusion equation. *Atmos. Ocean.*, **22**, 283-308.
- Robert, A. J., 1969 : The integration of a spectral model of the atmosphere by the implicit method. Proc. of WMO/IUGG Symp. on NWP Tokyo, Japan Meteorological Agency, VII.19-VII.24.
- Robert, A. J., 1981 : A stable numerical integration scheme for the primitive meteorological equations. *Atmos. Ocean.*, **19**, 35-46.
- Robert, A. J., 1982 : A semi-Lagrangian and semi-implicit numerical integration scheme for the primitive meteorological equation. *Jpn. Meteor. Soc.*, **60**, 319-325.
- Robert, A. J., J. Henderson, and C. Turnbull, 1972 : An implicit time integration scheme for baroclinic models of the atmosphere. *Mon. Wea. Rev.*, **100**, 329-335.
- Rood, R. B., 1987 : Numerical advection algorithms and their role in atmospheric transport and chemistry models. *Rev. of Geophys.*, **25**, 71-100.
- Smolarkiewicz, P. K., 1983 : A simple positive definite advection scheme with small implicit diffusion. *Mon. Wea. Rev.*, **111**, 479-486.
- Smolarkiewicz, P. K., 1984 : A fully multidimensional positive definite advection transport algorithm with small implicit diffusion. *J. Comput. Phys.*, **54**, 325-362.
- Staniforth, A. and J. Cote, 1991 : Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models—A review. *Mon. Wea. Rev.*, **119**, 2206-2223.
- Staniforth, A., and C. Temperton, 1986 : Semi-implicit semi-Lagrangian integration schemes for a barotropic finite-element regional model. *Mon. Wea. Rev.*, **114**, 2078-2090.
- Takacs, L. L., 1985 : A two-step scheme for the advection equation with minimized dissipation and dispersion errors. *Mon. Wea. Rev.*, **113**, 1050-1065.
- Tanguay, M., A. Simard and A. Staniforth, 1989 : A three-dimensional semi-Lagrangian scheme for the Canadian regional finite-element forecast model. *Mon. Wea. Rev.*, **117**, 1861-1871.
- Temperton, C., and A. Staniforth, 1987 : An efficient two-time level semi-Lagrangian semi-implicit integration scheme. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **113**, 1025-1039.
- Williamson, D. L., and P. J. Rasch, 1989 : Two-dimensional semi-Lagrangian transport with shape-preserving interpolation. *Mon. Wea. Rev.*, **117**, 102-129.
- Zalesak, S. T., 1979 : Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. *J. Comput. Phys.*, **31**, 335-362.

## The Comparison of Semi-Lagrangian Method to Positive Definite Schemes

Tzay-Ming Leou <sup>1</sup>    Hung-Chi Kuo <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Computer Center, Central Weather Bureau  
Taipei, Taiwan, R.O.C.

<sup>2</sup> Department of Atmospheric Sciences  
National Taiwan University

### ABSTRACT

Using Gaussian cone, cosine cone and slotted cylinder three different passive bodies, we compared semi-Lagrangian method, the Smolarkiewicz method and the Hsu-Arakawa method. Research results shown the  $\Delta t$  choice of semi-Lagrangian method are limited by accuracy and the order of wind shear on trajectory, not limited by stability. The larger  $\Delta t$  of semi-Lagrangian method the more phase errors, but the smaller  $\Delta t$  need the more interpolation times it reduces accuracy. So for the accuracy, use semi-Lagrangian method it need choice suitably  $\Delta t$ . The maintenance of amplitudes to semi-Lagrangian method is better than the Smolarkiewicz method, the Hsu-Arakawa method and FD4. But to the advection of slotted cylinder, the overshoot and undershoot to semi-Lagrangian method are more than 10%.

Key words : Semi-Lagrangian scheme, Positive definite scheme, Slotted cylinder.