

# 阻塞研究—第一部份：魔子(modon)穩定度之分析

洪志誠 林 和  
國立臺灣大學大氣科學系

(中華民國八十三年三月二十八日收稿；中華民國八十三年六月二十四日定稿)

## 摘 要

阻塞研究中，魔子(Modon)結構是區域理論較嚴謹的一支，數值實驗及觀測皆獲得有力支持。此外，瞬變擾動(2-8天)維持阻塞的生命，亦獲得不少觀測證據。本文嘗試結合這兩支研究於一爐，從理論，數值實驗及觀測三方面探討其可行性及局限。

若將魔子視為阻塞的零階近似(zero-order approximation)解，假設魔子動力結構之穩定性是阻塞持續的主要原因。而次一階(first-order)的瞬變渦流對阻塞應為穩定擾動，魔子分流場可以有效率得吸收瞬變渦流之能量，抵抗摩擦消耗，延長阻塞生命。由於瞬變渦流在魔子的初期演化屬於初始值問題，同時包括連續波譜(continuous spectrum)與離散正模(discrete normal mode)的演化。我們將以李亞普諾夫(Liapunov)直接法分析魔子穩定度，找出穩定的充要條件。

若假設擾動為均向，根據阿諾(1965)理論，以李亞普諾夫函數二次變分( $\delta^2 L$ )是否為負定鑑定穩定度。計算得到魔子不穩定的臨界波長大約4000公里，依此標準瞬變渦流屬於穩定類型的擾動。當擾動為非均向，我們首先以擾動的能譜重心決定擾動的非均向性( $\epsilon$ 定義見內文)，然後從數值實驗歸納得到，對相同平均尺度( $\delta^2 L < 0$ )之擾動，如果非均向性大於1( $\epsilon > 1$ )為不穩定；小於1( $\epsilon < 1$ )為漸近穩定；等於1( $\epsilon = 1$ )為中性穩定。能譜分析顯示瞬變渦流的非均向性小於1，滿足穩定的條件。

關鍵詞：阻塞、瞬變擾動、魔子、有界的、李亞普諾夫直接法、均向性

## 一、前 言

由於非線性遞送(cascade)導致能量的鬱積和線性的頻散(linear dispersion)作用，區域集中的天氣型態並無法滯留原地，維持現狀。幾何特徵不久將向外頻散或隨渦條(Vortex filament)拉伸而變形。阻塞現象是少數的例外之一，在局部區域內聚集巨幅的固定型態並且持久不散。文獻記載最長生命的阻塞發生在1976年的夏天，幾乎整個夏季歐洲都籠罩在阻塞造成的異常天氣下，而阻塞平均生命也近於二個星期，遠遠超過斜壓不穩定預測的天氣波上限。阻塞異乎尋常的生命週期與超穩定結構，正是最突出的天氣特徵，也是動力上值得探討之處。

解釋阻塞異常穩定的理論大概可以分成二支，一支由 Charney & Devore (1979) 為代表稱之大域 (Global) 理論；另一支則是 McWilliams(1980) 所提出的區域 (Local) 理論或稱魔子 (Modon) 理論。全球理論強調透過山脈或邊界層熱力效應可導致數種全球性平衡解 (Multiple Equilibrium)，在此大域的定義與一般數學分析之術語約有不同，指的是全球均勻分佈的正模解；其中一解具有明顯經向環流 (Low index) 被認定是阻塞。此種論點認為阻塞是外力所迫使出來的全球現象。區域理論則以準地轉位渦方程之解析解思考阻塞，循著阻塞內部流函數與位渦近乎線性相關的特性，認為阻塞是非線性能量鬱積與線性頻散二種效應，在局部區域近乎平衡，是位渦方程的非線性解析解 (Stern, 1975; McWilliams, 1980; Malguzzi & Malanotte-Rizzoli, 1984)。魔子解則如圖 1 所示，由圖得知魔子流函數與位渦定性的特徵完全相似，皆為南北偶極化的結構，定量上，數值正好相差常數倍，兩者互為線性負相關 (圖 1.c)。

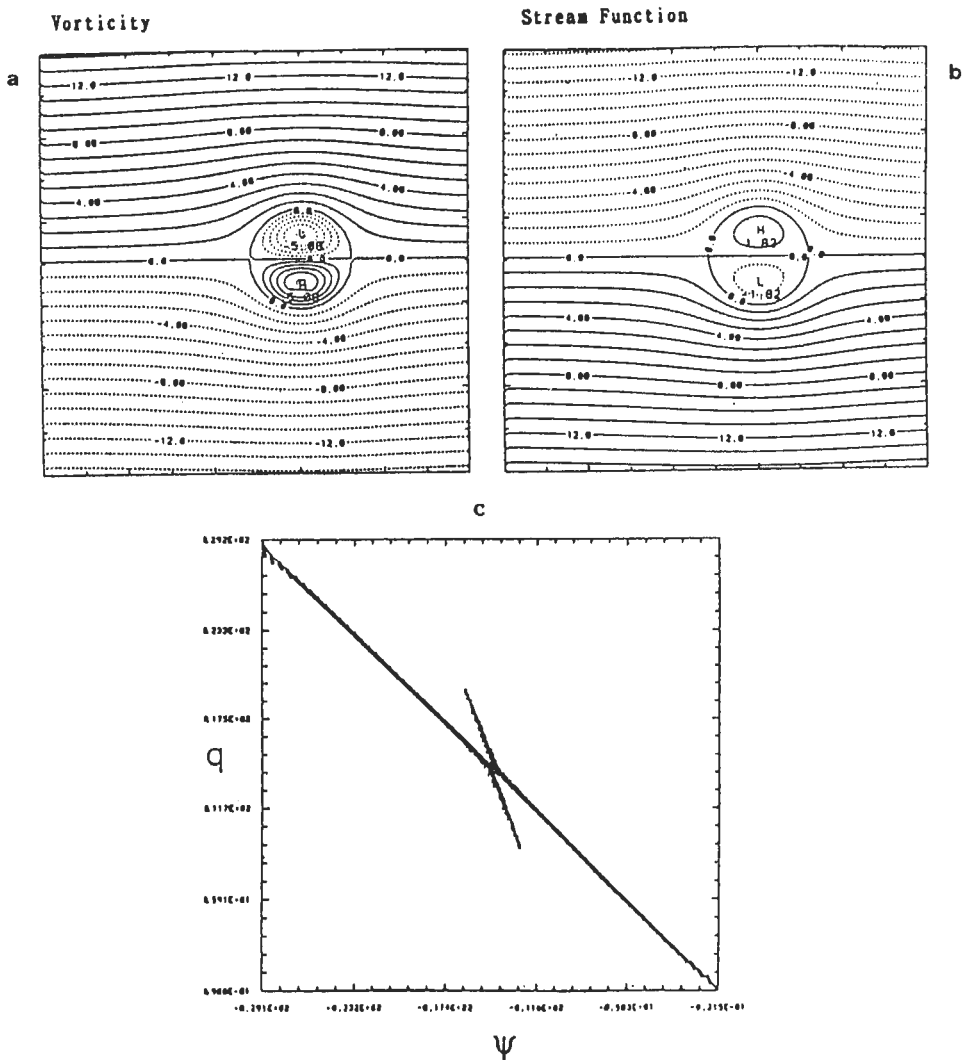


圖 1 (a) 魔子位渦場。(b) 魔子流函數。圖中流函數與位渦分別以  $\beta R_d^3$  與  $\beta R_d$  無因次化的結果；其中  $\beta$  表科氏參數的南北梯度， $R_d$  為羅士培波變形半徑；等值線之間距為 1。(c) 位渦度 (縱軸) 與流函數 (橫軸) 之散佈圖，圖中斜率較陡者 (斜率 = -2.78) 表魔子半徑內部值；斜率較平滑者 (-0.99) 為魔子半徑外部值。

Dole(1983)發現阻塞期間，高度異常並無統計上全球性關聯，認定阻塞是區域現象；而魔子理論，在觀測方面獲得相當程度的印證。從資料分析顯示，阻塞期間，位渦度與流函數幾近線性負相關，並且阻塞半徑內、外延著不同的斜率分佈(Malanotte-Rizzoli & Hancock, 1987; Butchart et al, 1989)，見圖2。

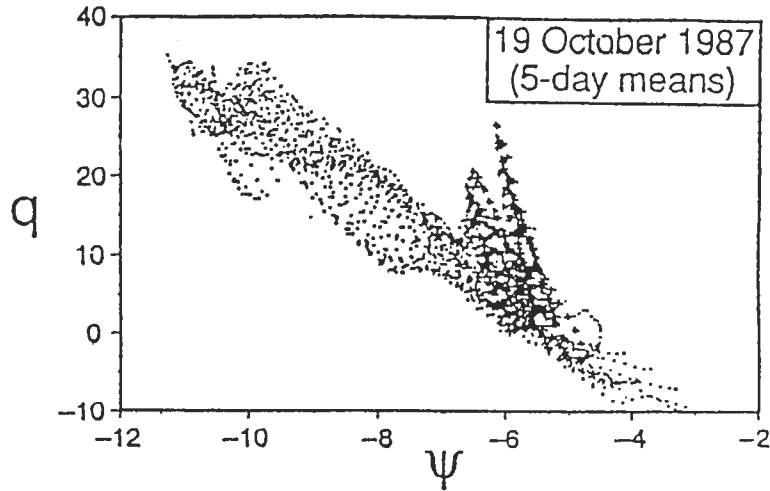


圖2 大西洋阻塞個案，阻塞期間流函數與位渦之散佈圖。圖中流函數與位渦皆為無因次數值。摘自 Butchart et al (1989)。

除了魔子理論，資料診斷(Illari & Marshall, 1983; Illari, 1984; Metz, 1986; Shutts, 1986; Mullen, 1987; Holopainen et al, 1987)與數值實驗(Shutts, 1983; Haines & Marshall, 1987)發現，阻塞期間，高頻擾動(或天氣波動)的位渦通量(potential vorticity flux)為逆梯度輸送(upgradient transport)，恰巧能加強阻塞脊(見圖3)，是維持阻塞相當重要的物理機制。

但是，魔子理論只涉及阻塞平均場的動力解，而阻塞一般發生在噴流下游(Rex, 1950; Dole, 1983)，處於擾動特別頻繁的環境，這些擾動是破壞或維持魔子結構？此外，由於阻塞生命遠遠超過天氣波的周期，渦流的位渦通量對基本場的位渦收支可能具有統計的顯著性，擾動與阻塞間能量收支與轉換速率的計算，也是值的進一步探討的問題。

綜合上面討論，我們認為如果將魔子理論與瞬變渦流二股觀點分開討論，很可能對阻塞持久只是局部性的瞭解。事實上，區域理論與瞬變渦流二種論點並不互相衝突。本研究的目地便是嘗試聯結這二股思維，加入穩定度的考量，允許擾動場有條件的維持阻塞結構，檢視瞬變渦流在阻塞期間所扮演的角色。

我們根據魔子是集中區域內，相同能量當中擁有最小渦動能的天氣型態(Stern, 1975; Leith, 1983)出發，以魔子動力結構的穩定性解釋阻塞持久的主要原因。假設瞬變渦流對魔子阻塞為穩定或條件性穩定的擾動(在此穩定表初始擾動能量隨時間減弱或固定不變)，在穩定可以保證的條件下，魔子分流場提供一個有效的變形環境，快速地汲取瞬變渦流的能量，用以抵擋摩擦的耗損，延續阻塞生命。由於魔子流函數與位渦為負相關，不滿足Fjortoft穩定條件。就動力

觀點魔子基本場為條件性穩定，所以本研究重心是分析魔子穩定度，找出穩定的條件後，證明瞬變渦流屬於穩定類型的擾動。

第一部分研究，我們嘗試以李亞普諾夫直接法(Liapunov Direct Method)分析魔子穩定度，以系統守恆量的限制，從擾動能量是否有界的(bounded)觀點分析魔子穩定度，找出穩定的條件。第二部分則以數值方法模擬瞬變渦流在魔子的初期演變，瞭解擾動魔子之間能量的輸送問題，以及檢驗瞬變渦流是否如假說預期，在魔子穩定度可以保證的條件下，將能量回饋基本場。

阻塞有多種類型(鄒等,1993)，有些強振幅的暖脊，魔子理論在此適用性不明顯。為了避免混淆，本研究只局限於魔子型阻塞的探討。此外，由於魔子在研究中被視為已存在的基本場。因此，關於魔子之形成或阻生問題並不在本研究的範圍內。

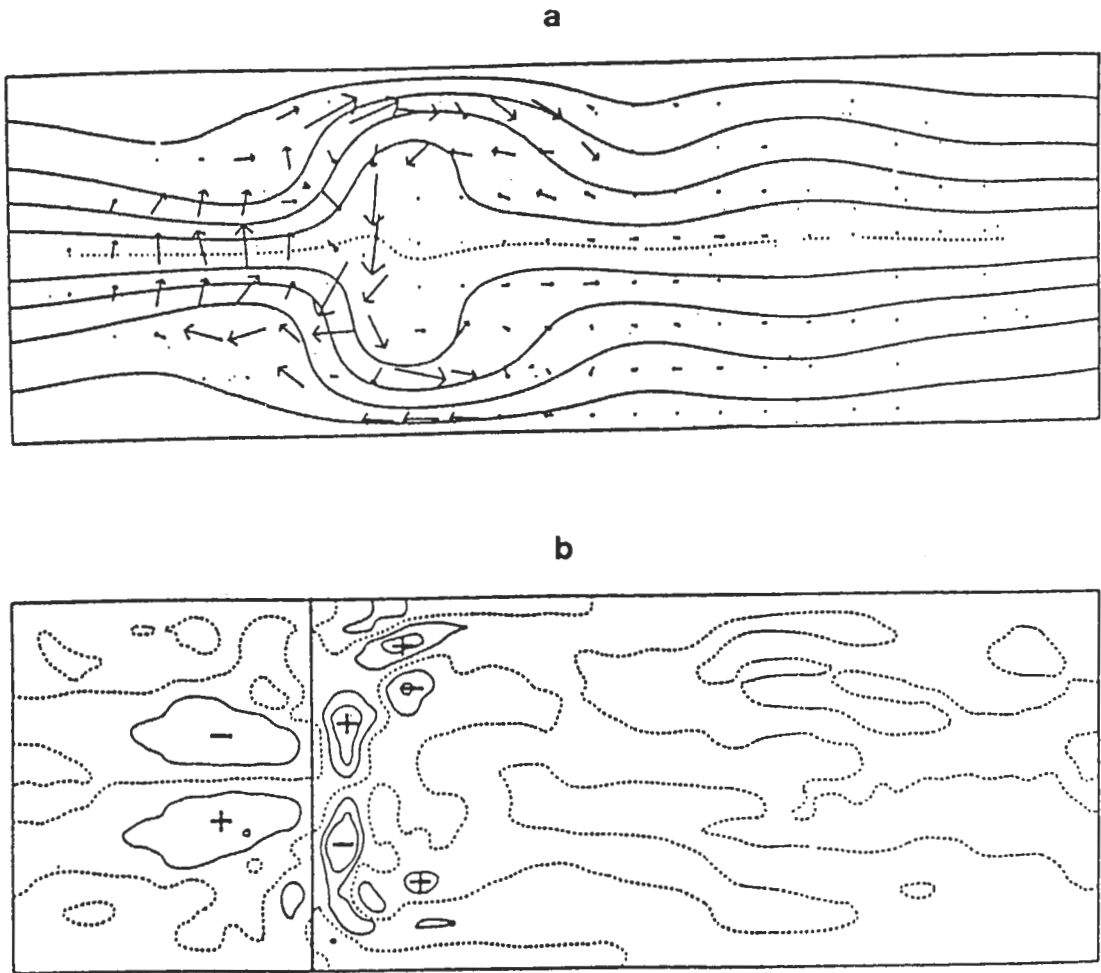


圖3 (a)阻塞期間，瞬變渦流(2-8天)之位渦通量( $\overline{V'q'}$ )的數值模擬。圖中等值線表阻塞流函數。(b)同上，但為位渦通量之輻散場( $\nabla \cdot \overline{V'q'}$ )。圖中之等值線間距為 $5 \times 10^{-11} s^{-2}$ 。摘自 Shutts(1983)。

## 二、理論基礎

### (一) 李亞普諾夫分析

解決一個動力系統之恆定(steady)點，對疊加的任一微小擾動是否穩定，氣象上常用的方法是固有值分析。將擾動場以一組離散正模展開，代入線性化擾動(linearized perturbed)方程，從固有值是否有虛根判斷穩定度。但是，此種方法只適用於時間趨近於無窮大；在擾動的初期演化，任一初始擾動場未必能用固有函數離散波譜作完整的展開(Shepherd,1985; 林,1988)。此外，魔子流函數具區域特徵，其下游有明顯的變化(downstream variation)，連續波譜對擾動初期演變不能忽視，需加入此分量才能正確的掌握擾動場的演變(Farrel,1989)。然而，李亞普諾夫直接法不受連續波譜的限制，這也是本研究採用此方法的主要原因之一。

李亞普諾夫直接法是根據擾動能量是否有界，判斷基本場的恆定態，對疊加的擾動是否穩定，以幾何方法證明：當系統在恆定點的總能量為極小值時，擾動在相平面上的演化軌跡，將局限恆定點附近有限的區域，恆定點為穩定平衡(圖4)。下面我們以單擺運動為例討論此方法。

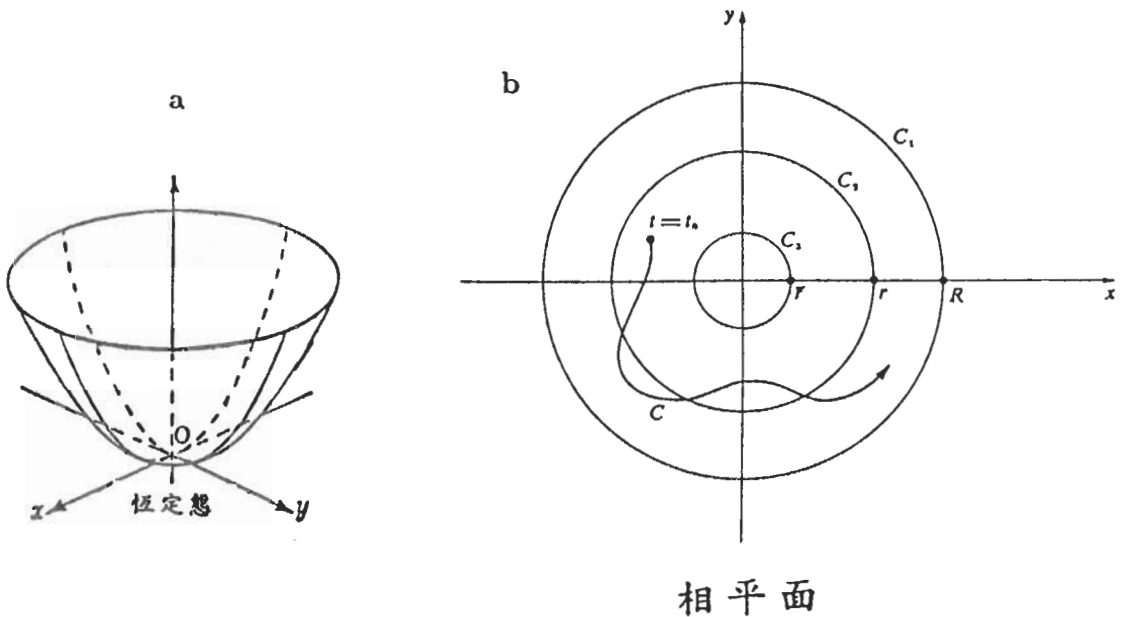


圖4 (a)當系統之恆定點(steady point)為穩定平衡時，恆定點鄰近，李亞普諾夫函數的幾何示意圖。圖中縱軸表系統之李亞普諾夫函數，座標原點為系統恆定點。(b)同上，但在系統恆定點疊加任一微小擾動後，擾動在恆定點附近，相平面上的演化軌跡。圖中封閉曲線表李亞普諾夫函數之等值線；座標原點為系統恆定點；曲線則為擾動演化軌跡。

假設單擺的質量為  $m$ ，擺長  $l$ ，重力加速度為  $g$ ，空氣阻力係數  $k_s$  ( $k_s \geq 0$ )；並且假設空氣阻力與單擺運動速度成正比。根據牛頓運動定律，單擺之運動方程可以寫成：

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin\theta - k_s l\dot{\theta} \quad (1)$$

上式 $\theta$ 表單擺與鉛垂線的夾角， $\dot{\theta}$ 表 $\theta$ 的時間一次微分， $\ddot{\theta}$ 為時間的二次微分；等號右邊第一項表恢復力，第二項為空氣阻力。將(1)式兩邊同除 $ml$ 可以得到：

$$\ddot{\theta} + r\dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0 \quad (2)$$

其中 $r = k_s/m$ 。令新變數 $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$ ，上式可以轉換成聯立的一階常微分方程：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -rx_1 - \frac{g}{l} \sin x_1 \end{aligned} \quad (3)$$

分析(3)式，很明顯 $(x_1, x_2) = (0, 0)$ 是(3)式的一個恆定點。接著，我們在恆定點疊加任一微小擾動，將單擺緩慢移至 $(x_1, x_2) = (\theta_0, 0)$ 處。我們將根據受擾動的單擺是遠離或向恆定點收斂，檢定恆定點的穩定度。

李亞普諾夫直接法是先建構動力系統的李亞普諾夫函數。然而李亞普諾夫函數沒有固定形式，對一般動力系統我們可以嘗試系統的積分守恆量。因為單擺動能為 $\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$ ，位能為 $-mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$ ，系統之總能量為：

$$L = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 - mgl(\cos\theta - \cos\theta_0) \quad (4)$$

上式 $L$ 即系統的李亞普諾夫函數（以下簡稱 $L$ 函數），不考慮空氣摩擦 $L$ 是一守恆量。

接著分析 $L$ 函數在恆定點附近的行為，檢驗 $L$ 在恆定點是否為極值。在判斷 $L$ 函數是否為極值時，我們不直接計算 $L$ 函數的量，而是運用一些數學技巧。先假設相平面上，單擺在定點鄰近的演化軌跡為 $c(t)$ 。然後沿著 $c(t)$ ，追蹤 $L$ 函數；根據 $L$ 函數的演變是否有界的，決定 $L$ 函數是否為極值。(4)式沿著 $c(t)$ 作時間微分得到：

$$dL(x_1, x_2)/dt|_{c(t)} = \frac{\partial L}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2}x_2 \quad (5)$$

結合動力方程(3)式，上式可化為：

$$\begin{aligned} \frac{dL(x_1, x_2)}{dt} &= mgl(\sin x_1)x_2 - ml^2x_2(rx_1 + \frac{g}{l}\sin x_1) \\ &= -ml^2rx_2^2 \end{aligned} \quad (6)$$

因為 $r = k_s/m \geq 0$ ，所以上式恆小等於零。此結果表示沿著單擺運動軌跡， $L$ 值逐漸遞減( $L(t) \leq L(t_0)$ ， $L(t_0)$ 為初始 $L$ 函數值)。

此外，從(4)式得到 $L(t)$ 與 $L_0$ (恆定點之 $L$ 函數值)的差為：

$$L(t) - L_0 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mgl(1 - \cos\theta) \quad (7)$$

因為上式等號右邊二項皆大於零，因此 $L(t) - L_0 \geq 0$ 。上式表 $L$ 函數在恆定點為極小值。結合(6)式得到：

$$L_0 \leq L(t) \leq L(t_0) \tag{8}$$

由於  $L$  函數是系統動能與位能的總和，上式隱含單擺運動中，單擺的動能與位能介於上限 ( $L(t_0)$ ) 與下限 ( $L_0$ ) 之間。既然單擺的動能與位能都是有界的，因此單擺在相平面的演化軌跡  $c(t)$ ，將局限在以  $L(t_0)$  與  $L_0$  值為半徑，平衡點為圓心的圓形區域內 (圖5)。亦即，恆定點對任一疊加的擾動為穩定平恆。

此外，如果考慮空氣阻力，(8)式變為  $L_0 \leq L(t) < L(t_0)$ 。此種情況， $L$  函數將隨單擺運動逐漸趨近  $L_0$ ，擾動的演化軌跡  $c(t)$  最後向平衡點收斂，又稱為漸近穩定 (asymptotically stable)。

值得注意的是：上面證明，我們僅利用單擺運動過程，動能與位能是有界的，證明系統恆定點為穩定平衡。至於系統 [(3) 式] 在恆定點鄰近的解析解，或演化軌跡  $c(t)$  皆不需要推演出來。此外，當擺幅為有限，系統為非線性的情況，(8) 式的結論仍能適用。能克服固有值分析面臨的問題，解決初始值與非線性穩定度問題，正是李亞普諾夫方法最大的優點。

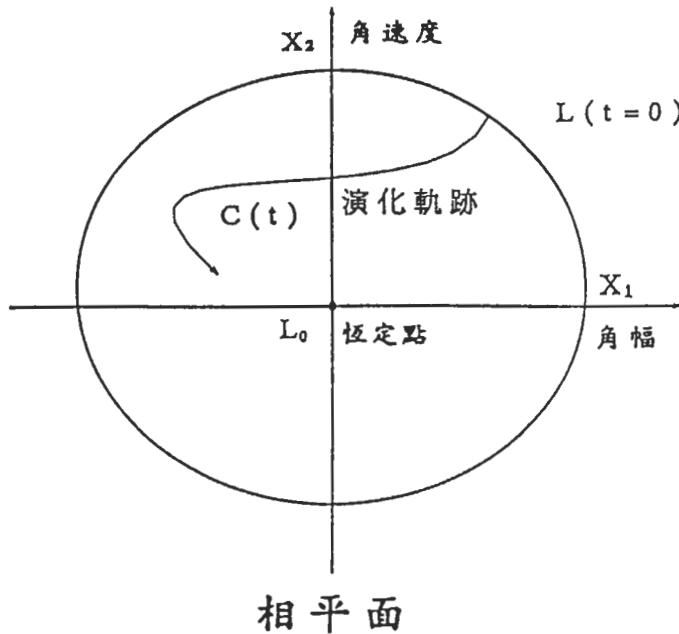


圖5 在單擺系統(1式)的恆定點(0,0)，疊加任一微小振幅之初始擾動( $\theta_0, 0$ )後，單擺在相平面的演化軌跡。圖中橫軸表單擺之擺幅( $\theta$ )，縱軸為單擺之角速度( $\dot{\theta}$ )； $c(t)$ 為演化軌跡；座標軸原點為系統之恆定點。

## (二) 阿諾理論

阿諾(1965)將上述方法應用到流體穩定度的分析。結合變分分析阿諾導出非平行風切流穩定度的充要條件。之後，Blumen(1968)將阿諾理論引入大氣穩定度的分析，得到與Charney & Stern(1964)完全相同的穩定度判定法則，不但印證了阿諾理論，也顯示阿諾理論潛藏的應用價值。McIntyre & Shepherd(1987)則結合阿諾理論與漢米爾頓(Hamiltonian)原理，考慮擾動為有

限振幅 (finite amplitude) 時，擾動積分保守量與非平行風切流的穩定度問題，將阿諾理論深一層的推廣。最近 Cao et al (1993) 也應用此方法探討鋒面對稱穩定度 (Symmetric Stability)。

阿諾理論同樣建立在擾動能量是否有界的基礎上。假設  $\bar{\psi}$  表流函數系統恆定態 (steady state) 的流函數， $\delta\psi$  為疊加於恆定態的任一初始擾動場。阿諾理論證明，在系統環流守恆的條件下，當李亞普夫函數之二次變分為正 (負) 定時，系統在恆定態的總能量為局部極小 (大) 值，並且擾動能量是有界的，恆定態對疊加的任一微小擾動為穩定平衡。

對流函數系統，阿諾所建構的李亞普諾夫函數 (或阿諾函數) 為系統能量與環流之和。即，

$$A_r = E + F$$

上式  $E$  表系統總能量， $F$  表任一僅包含渦度函數的全流場積分。由上式得知  $A_r(\bar{\psi})$  與  $A_r(\bar{\psi} + \delta\psi)$  皆為守恆量。當疊加擾動為微小振幅 ( $|\delta\psi| \ll |\bar{\psi}|$ )，利用變分法將  $A_r(\bar{\psi} + \delta\psi)$  對恆定態展開，在二階趨近下 (近似到  $O(|\delta\psi|^2)$ ) 如下：

$$A_r(\bar{\psi} + \delta\psi) \simeq A_r(\bar{\psi}) + \delta A_r(\bar{\psi}) + \delta^2 A_r(\bar{\psi})$$

上式  $\delta A_r$  與  $\delta^2 A_r$  分別表阿諾函數的一次與二次變分。由於阿諾函數恰巧使  $\delta A_r = 0$ ，因此系統加入擾動後導致阿諾函數的改變完全反應在二次變分形。即

$$\begin{aligned} A_r(\bar{\psi} + \delta\psi) - A_r(\bar{\psi}) &\simeq \delta^2 A_r(\bar{\psi}) \\ &= \frac{1}{2} \int \int (\nabla \delta\psi)^2 + \frac{d\bar{\psi}}{d\zeta} (\nabla^2 \delta\psi)^2 = Const \end{aligned} \quad (9)$$

(A)
(B)

其中， $\frac{d\bar{\psi}}{d\zeta}$  表基本場流函數與渦度的比值；Const 表任一常數，由擾動初始值決定；(A) 項為擾動動能，(B) 項則為擾動渦動能。此守恆量相當於擾動在基本場演變的積分限制 (integral constraint)，相當於擾動在基本場演化過程，能量與渦動能重新分配的法則。

阿諾理論是根據  $\delta^2 A_r(\bar{\psi})$  守恆的特性，推論擾動能量是否有界。由於擾動能量成長或減弱與基本場  $\frac{d\bar{\psi}}{d\zeta}$  正負值有關，一般可分成兩種情況討論。當  $\frac{d\bar{\psi}}{d\zeta}$  為正定 (大於零) 時， $\delta^2 A_r(\bar{\psi})$  為正定。從 (9) 式推得擾動的動能或渦動能將介於 0 與  $\delta^2 A_r(\bar{\psi})$  二者之間。因此，擾動的動能 (渦動能) 在演化中是有界的，系統的恆定態為穩定平衡。對此種情形，系統的阿諾函數在恆定態為一極小值，幾何示意圖與相平面演化軌跡如圖 6 所示。另一種情況接近魔子阻塞， $\frac{d\bar{\psi}}{d\zeta}$  為負定。此種情形擾動能量與渦動能可以同時增加或減弱，無法從 (9) 式證明擾動能量是有界的。此種基本場，阿諾函數在恆定態並非極值，系統環流等值面在恆定態的幾何形狀像鞍面，如圖 7 所示，基本場屬於條件性穩定 (conditional stable)；對某些擾動為穩定，相平面的演化軌跡向恆定點收斂；對一些擾動，擾動的演化軌跡則逐漸遠離恆定點，基本場屬於不穩定。



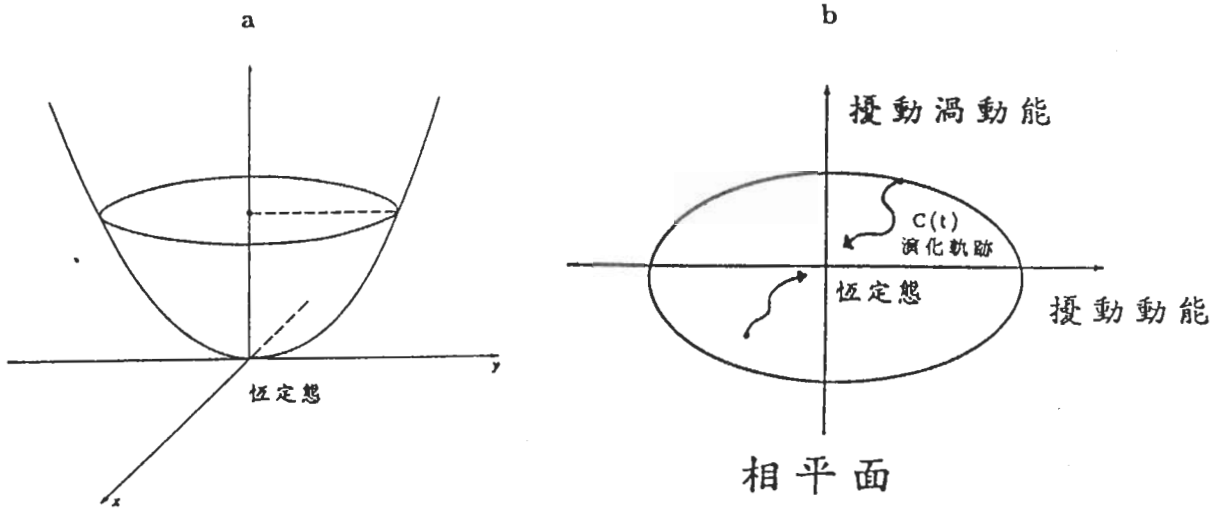


圖6 (a)系統環流值固定條件下，在基本場恆定態附近，系統總能量的幾何示意圖。圖中曲面表環流等值面；座標原點對應於系統恆定態；縱軸表系統能量。圖中顯示，對流函數與位渦為正相關( $\frac{d\psi}{dc} > 0$ )的基本場，系統在恆定態的能量為局部極小值。(b)同(a)，但在基本場之恆定態疊加任一微小振幅之擾動後，擾動在相平面的演化軌跡。圖中座標原點表系統恆定態，曲線則為擾動演化軌跡。

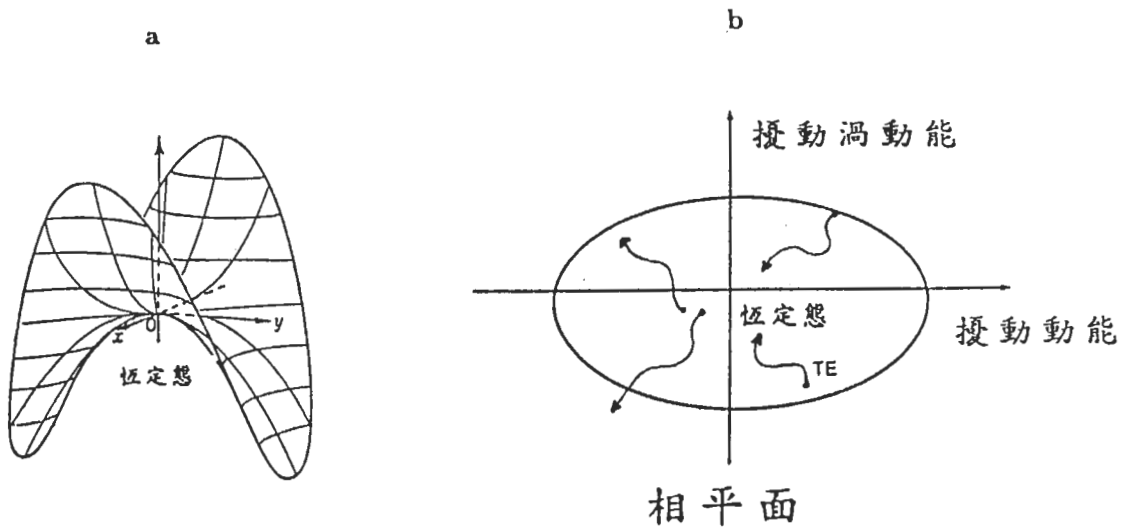


圖7 同上圖，但基本場(魔子)之流函數與位渦為負相關( $\frac{d\psi}{dc} < 0$ )。(b)圖中TE曲線即根據本研究假說推測，瞬變渦流在相平面可能的演化軌跡。

### 三、李亞普諾夫函數的建構

#### (一) 魔子解

由於觀測顯示阻塞是相當正壓結構(McWilliams,1980; Dole,1983)，在此我們以相當正壓系統討論魔子穩定度。相當正壓之位渦方程如下：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi - k_R^2\psi) + J(\psi - Uy, \nabla^2\psi - k_R^2\psi + \beta y) = 0 \quad (10)$$

其中  $k_R^2 = R_d^{-2}$ ； $R_d$  為羅士培波變形半徑， $U$  為基本場之緯流， $\beta$  為科氏參數南北向之梯度， $J(\cdot) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}$ 。考慮上式的魔子解(非線性恆定解)，即：

$$\begin{aligned} J(\psi - Uy, \nabla^2\psi - k_R^2\psi + \beta y) &= 0 \\ B.C. : \bar{\psi}|_{r_0} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

(11)式表基本場之流函數( $\bar{\psi} = \psi - Uy$ )與位渦度( $\bar{q} = \nabla^2\psi - k_R^2\psi + \beta y$ )為函數相關，即  $\bar{\psi} = \bar{\psi}(\bar{q})$ 。一般而言，滿足(11)式的解析解有無限多組，而魔子是滿足特殊邊界條件，當  $x, y \rightarrow \pm\infty$   $\psi \rightarrow 0$  之區域解。魔子解(McWilliams, 1980)可以寫成：

$$\nabla^2\psi - k_R^2\psi + \beta y = \begin{cases} \alpha_1(\psi - Uy) & \text{for } r \leq r_0 \\ \alpha_2(\psi - Uy) & \text{for } r > r_0 \end{cases} \quad (12)$$

其中  $r_0$  為魔子半徑， $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$  分別為魔子半徑內、外位渦與流函數的常數比值。在圓柱座標下，上式可轉換成貝索(Bessel)方程，求解得到：

$$\bar{\psi}(r, \theta) = \begin{cases} \frac{\mu^2}{\lambda^2} [r - \frac{J_1(\lambda r)}{J_1(\lambda r_0)} r_0] U \sin\theta & \text{for } r \leq r_0 \\ U (\frac{K_1(\mu r)}{K_1(\mu r_0)}) \sin\theta & \text{for } r > r_0 \end{cases} \quad (13)$$

其中  $\mu^2 = k_R^2 + \alpha_2$ ， $\lambda^2 = -(k^2 + \alpha_1)$ ， $J_1$  表一階第一類型貝索函數(Bessel function of order one)， $K_1$  表經過修勻之一階第一類型貝索函數(modified Bessel function of order one)。

#### (二) 李亞普諾夫函數

接著仿照單擺運動的分析，首先建構相當正壓系統的李亞普諾夫函數。由於魔子流函數在邊界趨近零，在此我們考慮之擾動集中在魔子中心附近，並且假設系統為雙周期性邊界條件(doubly periodic boundary condition)。

在建構李亞普諾夫函數時，我們同樣以系統積分守恆量出發。將(11)式乘以  $\psi$ ，然後對全場積分，結合高斯定理得到：

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \int ((\nabla\psi)^2 + k_R^2\psi^2) dx dy = 0 \quad (14)$$

其中  $\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2$  表系統動能， $\frac{1}{2}(k_R^2\psi^2)$  為位能。上式亦即系統能量守恆。

此外，將(11)式作全場積分可以得到另一個守恆量：

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int \int (\nabla^2 \psi - k_R^2 \psi + \beta y) dx dy \\ &= - \int \int J(\psi - Uy, \nabla^2 \psi - k_R^2 \psi + \beta y) dx dy = 0\end{aligned}\quad (15)$$

上式為系統環流守恆。從連鎖律(chain rule)可推得只要任何僅包括位渦之函數 $[\Phi(q)]$ 的全場積分也是守恆量，即：

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \int \int \Phi(q) dx dy = 0 \quad (16)$$

因為周期性邊界的緣故，從環流定理得知疊加擾動不影響(16)式的值。因此系統的李亞普諾夫函數可以寫成：

$$L = E + \lambda F \quad (17)$$

其中 $\lambda$ 為拉格朗日乘子(Lagrange multiplier)。

在此，假設疊加擾動為微小振幅( $|\delta\psi| \ll |\bar{\psi}|$ )，利用變分法將李亞普諾夫函數對魔子作二階趨近展開(近似到 $O(|\delta\psi|^2)$ )得到：

$$L(\bar{\psi} + \delta\psi) \approx L(\bar{\psi}) + \delta L(\bar{\psi}) + \delta^2 L(\bar{\psi}) \quad (18)$$

其中 $\delta L$ 與 $\delta^2 L$ 分別為李亞普諾夫函數的一階與二階變分。運用變分法與高斯定理計算結果：

$$\begin{aligned}L(\bar{\psi} + \delta\psi) &= \int \int \frac{1}{2}(\nabla\bar{\psi})^2 - \bar{\psi}\nabla^2\delta\psi + \frac{1}{2}(\nabla\delta\psi)^2 \\ &\quad + \int \int \frac{1}{2}k_R^2\bar{\psi}^2 + k_R^2\bar{\psi}\delta\psi + \frac{1}{2}k_R^2(\delta\psi)^2 \\ &\quad + \int \int \lambda\Phi(\bar{q}) + \lambda\Phi'(\bar{q})\delta q + \frac{1}{2}\lambda\Phi''(\bar{q})(\delta q)^2 + O(|\delta q|^3)\end{aligned}\quad (19)$$

其中， $\delta q = \nabla^2\delta\psi - k_R^2\delta\psi$ ，表擾動位渦場。如果省略 $O(|\delta q|^3)$ 項，整理上式得到：

$$\begin{aligned}L(\bar{\psi} + \delta\psi) &\simeq \int \int \frac{1}{2}(\nabla\bar{\psi})^2 + \frac{1}{2}k_R^2\bar{\psi}^2 + \lambda\Phi(\bar{q}) \\ &\quad + \int \int (\lambda\Phi'(\bar{q}) - \bar{\psi})\delta q \\ &\quad + \int \int \frac{1}{2}(\nabla\delta\psi)^2 + \frac{1}{2}k_R^2(\delta\psi)^2 + \frac{1}{2}\lambda\Phi''(\bar{q})(\delta q)^2\end{aligned}\quad (20)$$

將上式代入(18)式得到：

$$\begin{aligned}L(\bar{\psi} + \delta\psi) - L(\bar{\psi}) &\simeq \int \int (\lambda\Phi'(\bar{q}) - \bar{\psi})\delta q \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \int (\nabla\delta\psi)^2 + k_R^2(\delta\psi)^2 + \lambda\Phi''(\bar{q})(\delta q)^2\end{aligned}\quad (21)$$

上式含 $\delta q$ 項即李亞普諾夫函數之一次變分； $\delta q^2$ 表二次變分。比較(18)式與(21)式得到：

$$\begin{aligned}\delta L(\bar{\psi}) &= \int \int (\lambda \Phi' - \bar{\psi}) \delta q \\ \delta^2 L(\bar{\psi}) &= \frac{1}{2} \int \int (\nabla \delta \psi)^2 + k_R^2 (\delta \psi)^2 + \lambda \Phi''(\bar{q}) (\delta q)^2\end{aligned}\quad (22)$$

因為擾動場  $\delta\psi$  為任一的， $\Phi(\bar{q})$  並沒有特別限制，適當選擇  $\Phi(\bar{q})$  滿足  $\lambda\Phi'(\bar{q}) = \bar{\psi}$  則上式  $\delta L(\bar{\psi})$  恆等於零。在此條件，李亞普諾夫函數 [(17) 式] 相當於系統之能量與渦動能 (enstrophy) 乘以權重常數  $d\bar{\psi}/d\bar{q}$  之和，而疊加擾動後，李亞普諾夫函數的改變完全反應在  $\delta^2 L$ 。表成式子即：

$$\begin{aligned}L(\bar{\psi} + \delta\psi) - L(\bar{\psi}) &\simeq \delta^2 L(\bar{\psi}) \\ &= \frac{1}{2} \int \int ((\nabla \delta \psi)^2 + k_R^2 (\delta \psi)^2) + \frac{d\bar{\psi}}{d\bar{q}} (\delta q)^2\end{aligned}\quad (23)$$

(A)                      (B)

上式 (A) 項表擾動的能量，(B) 項為擾動之渦動能； $d\bar{\psi}/d\bar{q}$  為魔子流函數與位渦的比值，按其單位 (正比於長度平方)，可視為基本場的權重長度。因為  $L(\bar{\psi} + \delta\psi)$  與  $L(\bar{\psi})$  皆守恆 [(17) 式]，所以兩者的差亦為守恆量。換言之，在二階趨近下  $\delta^2 L(\bar{\psi})$  為常數。下面我們將根據此守恆量討論基本場的穩定度。

## 四、魔子穩定度分析

### (一) 均向性

這一小節將討論擾動尺度與魔子穩定度的關係，我們假設初始擾動場為均向性 (isotropy) 且為單一尺度。

首先將初始擾動流函數以傅立葉級數 (Fourier series) 展開：

$$\phi(x, y) = \sum_{k, l} \hat{\phi}(k, l) e^{i(kx + ly)} \quad (24)$$

為了討論方便，上式以  $\phi$  代替前面的  $\delta\psi$ ；其中， $\phi$  表擾動流函數， $\hat{\phi}(k, l)$  為波譜展開係數。由於初始場為任一特定尺度的均向擾動，擾動的波譜展開係數，在各方向皆相等，並且分佈在同心圓上 (見圖 8)。

將上式代入 (23) 式得到：

$$\delta^2 L = \frac{1}{2} \sum_{k^2 + l^2 = K_0^2} \left( (k^2 + l^2 + k_R^2) - \left| \frac{d\bar{\psi}}{d\bar{q}} \right| (k^2 + l^2 + k_R^2)^2 \right) \hat{\phi} \hat{\phi}^* \quad (25)$$

因為魔子  $d\bar{\psi}/d\bar{q} < 0$ ，所以上式  $\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{q}}$  項取絕對值後需乘上負號。由於忽略擾動能譜對穩定度的影響，在此，我們根據阿諾理論，以 (25) 式是否為負定作為穩定的判斷依據。將魔子的一些參數

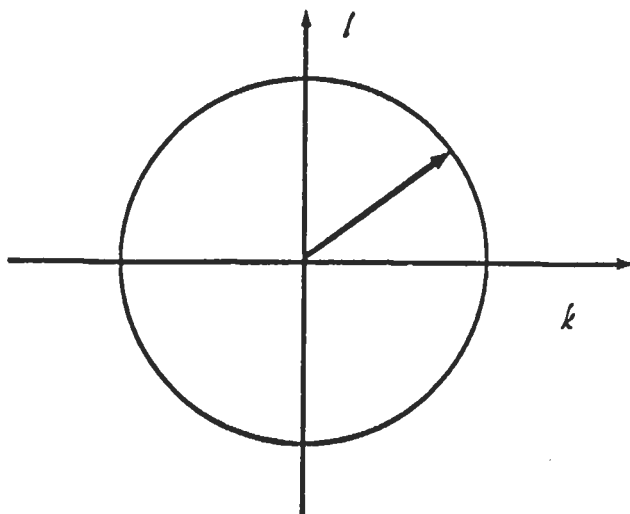


圖8 均向性擾動的能譜。圖中圓形表對某一特定波長( $k^2 + l^2 = K_0^2$ )的能譜。

(如圖1所示，魔子半徑約4800公里， $k_R^{-1}$ 約850公里，無因次後，位渦與流函數比值為-2.785) 代入上式，計算得到 $\delta^2 L < 0$ 的臨界波長大約4000公里。

另外，因為統計分析顯示，大多數的瞬變渦流(天氣波)沿著風暴路徑(storm tracks)移動，若選定風暴路徑上一定點當作基點(base point)，做一點統計相關(one-point statistical correlation)分析估計瞬變渦流的尺度。圖9是Wallace et al(1988)分析大西洋上，高頻濾波(2-6天)之高度場的一點統計相關圖。圖中為持遲延(lag)基點負一天(相當於瞬變渦流的初期演變)的結果。從圖估計瞬變渦流的尺度大約3000公里。

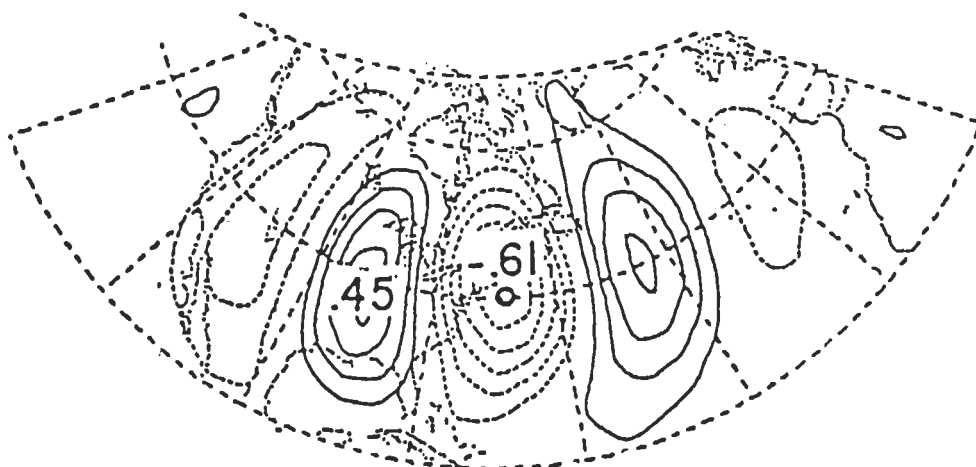


圖9 選擇大西洋風暴路徑(storm tracks)上某固定點( $(40^\circ N, 70^\circ W)$ )為基點(base point)，所作的一點統計相關(one-point statistical correlation)分析。圖為500hpa高頻濾波(2-6天)之高度場的一點相關圖。圖中顯示為遲延(lag)基點負一天(相當於瞬變渦流的初期演變)的結果；畫圓圈者即為基點。摘自Wallace et al(1988)。

比較瞬變渦流與不穩定臨界尺度，發現瞬變渦流的統計尺度小於魔子的不穩定臨界波長，因此，不考慮能譜或其它效應，瞬變渦流屬於穩定類型的擾動。此結論與McWilliams(1981)數值實驗所得結果是一致的。McWilliams在魔子穩定度之數值實驗發現，在擾動是微小振幅(無因次化之振幅小於1)的情況下，當疊加的初始擾動之平均尺度小於魔子直徑，魔子結構最後潰散(destruction)，屬於不穩定的例子；當擾動之平均尺度小於魔子直徑時，則魔子結構維持完整，屬於穩定的例子(圖10)。由於不穩定臨界波長與魔子直徑相當，兩種穩定度判別方法，皆顯示瞬變渦流之尺度落在穩定的範圍。

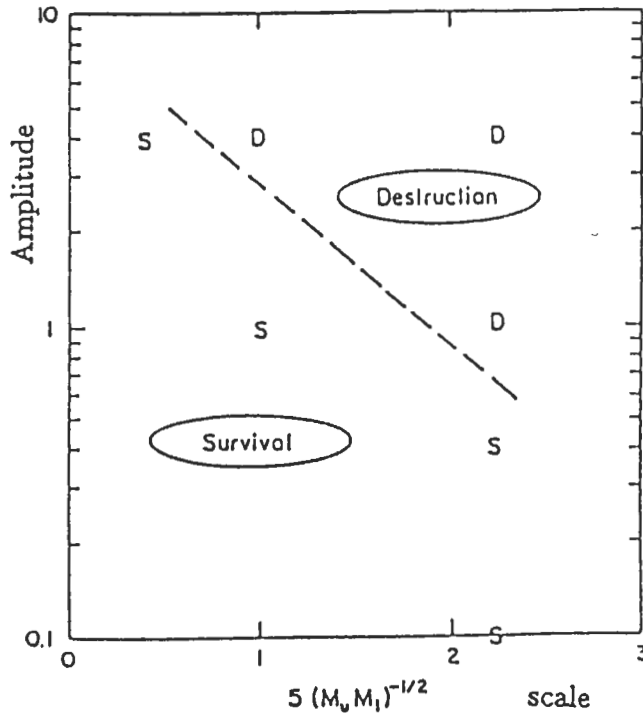


圖10 均向初始擾動之穩定度的分類。圖中標記s者表穩定(存活)類型，標記d表不穩定(潰散)類型。橫軸表初始擾動之平均尺度(長度1相當於魔子半徑)；縱軸表擾動渦度場之均方根值(rms)。摘自McWilliams(1981)。

## (二) 連續能譜與非均向性

除了初始擾動尺度大小，Pierini(1985)與Swater(1986)的研究指出擾動場的能譜也是決定穩定度的重要因子。

這方面的研究，Swater(1986)以擾動場之渦動能與能量的比值決定擾動能譜的特性，令：

$$\eta^2 = \frac{\int \int (\nabla^2 \delta\psi - k_R^2 \delta\psi)^2}{\int \int (\nabla \delta\psi)^2 + k_R^2 (\delta\psi)^2} \quad (26)$$

上式，分子項表初始擾動之渦動，分母則為擾動之能量。從單位分析得知， $\eta^2$  正比於波數平方。由上式得到， $\int \int (\nabla^2 \delta\psi - k_R^2 \delta\psi)^2 = \eta^2 \times \int \int (\nabla \delta\psi)^2 + k_R^2 (\delta\psi)^2$ ，將此結果代入(23)式得到：

$$\delta^2 L = \frac{1}{2} \int \int \left[ 1 + \frac{\eta^2}{d\bar{q}/d\bar{\psi}} \right] [(\nabla \delta\psi)^2 + k_R^2 (\delta\psi)^2] \quad (27)$$

因為魔子流函數與位渦之比值為常數，積分上式時， $d\bar{\psi}/d\bar{q}$  可以搬出積分式之外：

$$\delta^2 L = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\eta^2}{d\bar{q}/d\bar{\psi}} \right) \int \int (\nabla \delta\psi)^2 + k_R^2 (\delta\psi)^2 \quad (28)$$

又因為魔子解分成半徑內、外兩部分[(12)式]上式可以進一步分解成：

$$\begin{aligned} \delta^2 L = & \frac{1}{2} (1 + \eta^2/\alpha_1) \int \int_{r < r_0} (\nabla \delta\psi)^2 + k_R^2 (\delta\psi)^2 \\ & + \frac{1}{2} (1/\alpha_2 - 1/\alpha_1) \int \int_{r > r_0} (\nabla^2 \delta\psi - k_R^2 \delta\psi)^2 \end{aligned} \quad (29)$$

上式 $\alpha_1$ 與 $\alpha_2$ 分別表魔子半徑內部與外部，位渦與流函數的比值。從上式發現，透過(26)式的代換我們便可以將能譜的效應，反應在李亞譜諾夫函數。

Pierini與Swater認為擾動能譜為連續的情況，阿諾理論仍適用， $\delta^2 L < 0$  是魔子穩定的充分條件。若初始擾動滿足此條件，擾動能量將是有界的。因為魔子半徑內部位渦與流函數的線性比值較小(斜率較抖)；即， $|\alpha_1| > |\alpha_2|$ ，所以上式等號右邊第二項恆為負值。因此，當 $1 + \eta^2/\alpha_1$  小於零時， $\delta^2 L < 0$ 。計算結果， $1 + \eta^2/\alpha_1 < 0$  的臨界波長大約4000公里。

但是，Carnevale et al(1989)認為 $\delta^2 L$ 為積分量，從 $\delta^2 L < 0$  的條件無法推論初始擾動的每個尺度量也都滿足 $\delta^2 L < 0$ 。因此，滿足 $\delta^2 L < 0$  的初始擾動，仍可能存在穩定、不穩定或中性的演化。Carnevale et al以一組具有共振條件的初始擾動(由三種不同尺度的擾動所組成)證明了初始條件滿足 $\delta^2 L < 0$  的擾動，演化中，透過非線性能量轉換，擾動能量仍可能成長。

在此，我們認為Swater理論最大的問題是(26)式無法充分反應初始擾動能譜的特性，對相同 $\eta$ 值的初始擾動，存在不同的能譜分佈(以下將說明)，因此對連續能譜的情況，不能直接以 $\delta^2 L < 0$  (或 $1 + \eta^2/\alpha_1 < 0$ )作為魔子穩定的充分條件。

因此，本文嘗試以新的方法決定初始擾動的非均向性(即能譜特性)。首先將初始擾動之位渦場( $q'$ )以離散的傅立葉級數展開：

$$q'(x, y) = \sum_{k, l} \hat{q}'(k, l) e^{i(kx + ly)} \quad (30)$$

其中， $\hat{q}'(k, l)$ 是擾動位渦度的波譜展開係數。在此必需指出，以上式子雖然以離散的形式出現，(30)式並非魔子的離散正模解，但離散波譜展開同時包括了離散正基與連續能譜。當展開的波數足夠時，(30)式可以充分得掌握離散正基與連續能譜的特性(Yanai & Nitta, 1968)。

接著在波譜平面，分別沿著 $k$ 與 $l$ 方向，對被積分函數 $\hat{q}'(k, l) \times k$ 與 $\hat{q}'(k, l) \times l$ 作雙重積分，即：

$$w_k = \sum_{k,l} \hat{q}'(k,l) \times k$$

$$w_l = \sum_{k,l} \hat{q}'(k,l) \times l$$
(31)

上式， $w_k$  可視為擾動渦度場之波譜密度與  $k$  軸所圍的權重面積，相當於擾動渦度場之波譜密度 ( $\hat{q}'(k,l)$ ) 在  $k$  軸的分佈重心； $w_l$  則為擾動渦度波譜密度與  $l$  軸所圍的權重面積，或波譜密度在  $l$  方向的分佈重心。

然後，我們以擾動之初始能譜的分佈重心決定擾動之非均向性。即，以  $w_k$  與  $w_l$  的比值決定擾動的非均向性：

$$\epsilon \equiv w_l/w_k$$
(32)

下面我們以簡單的例子說明上式。假設初始擾動之譜密度為常數，並且能譜分佈呈橢圓狀。根據上(32)式，計算得到：如果擾動能譜為軸對稱分佈，則  $w_k = w_l$ ，此類型擾動的非均向性為 1；如果擾動能譜在  $k$  方向分佈較分散(東西向扁平狀)，則  $w_k > w_l$ ，此類型擾動能譜的重心貼進  $k$  軸，其非均向性小於 1；如果擾動能譜在  $l$  方向分佈較分散(南北拉長狀)，則  $w_k < w_l$ ，此類型擾動的能譜的重心貼進  $l$  軸，非均向性大於 1(圖 11)。

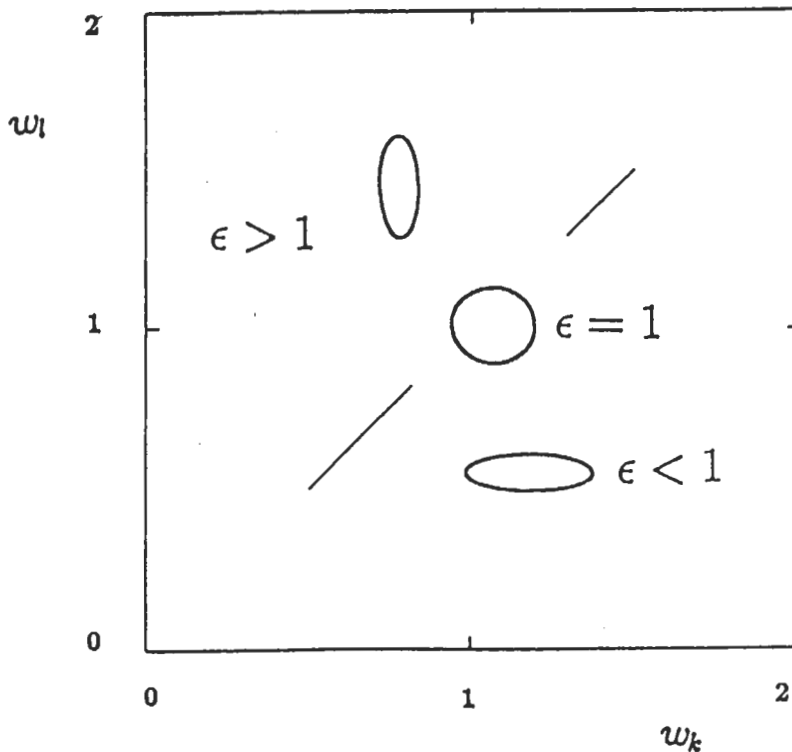


圖 11 各種初始擾動能譜(非均向性)的示意圖。圖中橢圓表平均尺度相同但非均向性不同之能譜。橫軸( $w_k$ )、縱軸( $w_l$ )分別表能譜在  $k$  軸與  $l$  軸的分佈重心。



然而，我們按 Swater 的定義 [(26) 式]，分別計算圖 11 中擾動的  $\eta^2$  值，發現不同能譜的擾動  $\eta^2$  皆相同。由此顯示 (26) 式並不能完整得反應初始擾動的能譜特性。

接著我們參照 Shepherd(1985) 的方法，嘗試以數學推導找出擾動能譜與魔子穩定度的關係，但是發現拉格朗日座標轉換並不適用於非平行風切流(魔子)穩定度的分析。在理論尚未發展成熟之前，下面我們先根據 (32) 式，以數值方法歸納出一些通則。

在此，考慮平均尺度皆相同，且  $\delta^2 L < 0$ ，但非均向性(能譜)不同之初始擾動，在魔子初期演變的差異。圖 12 是各種初始擾動在一個正壓波譜模式(波數為 32)，模擬的結果。由圖顯示，對非均向性大於 1 的擾動，擾動能量隨時間增大，屬於不穩定演化；小於 1 為漸近穩定，能量逐漸減少；等於 1 則為中性穩定。此外，我們發現當非均向性值愈大(大於 1)，擾動能量成長速度愈快，基本場愈不穩定；當非均向性愈小(小於 1)，擾動能量減弱速度愈快，基本場愈穩定。

結合圖 11 與圖 12 的結果得到圖 13。圖中顯示，按 (32) 式的定義，初始擾動其非均向性為 1 的等值線，可以將初始能譜區分為穩定與不穩定兩種類型。

最後我們將上面結果，納入魔子穩定的判斷，檢定瞬變渦流的能譜是否滿足穩定的條件。因為瞬變渦流的幾何外形為南北狹長狀(圖 9)，轉換到波譜空間，其能譜呈東西扁平狀。根據 (32) 式計算得到瞬變渦流之非均向性小於 1。能譜分析結果瞬變渦流滿足穩定的條件，屬於穩定類型的擾動。

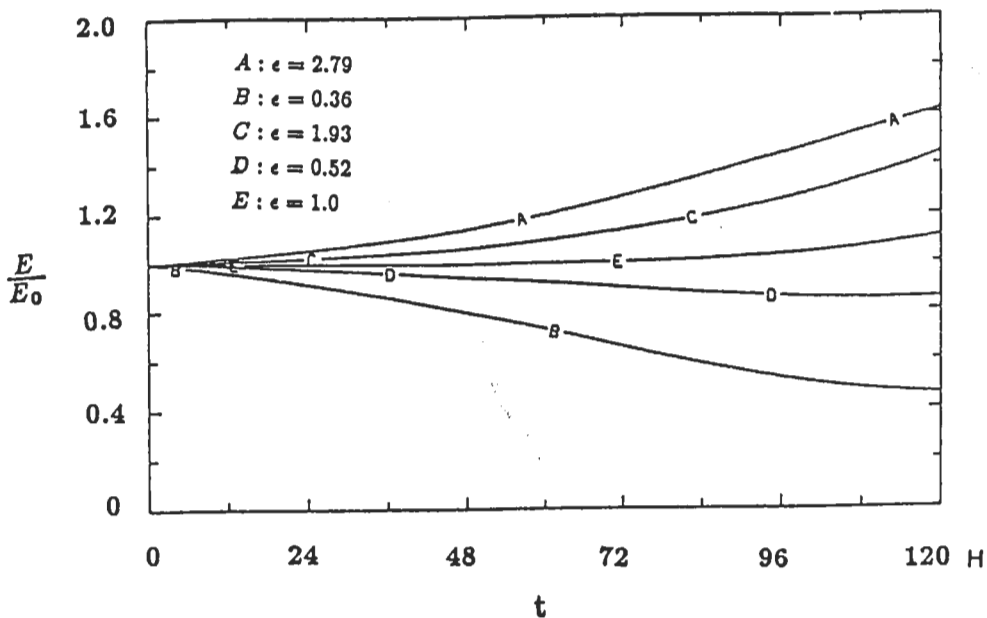


圖 12 各種非均向性(能譜)之初始擾動，在魔子初期演變時，能量時間序列的比較。

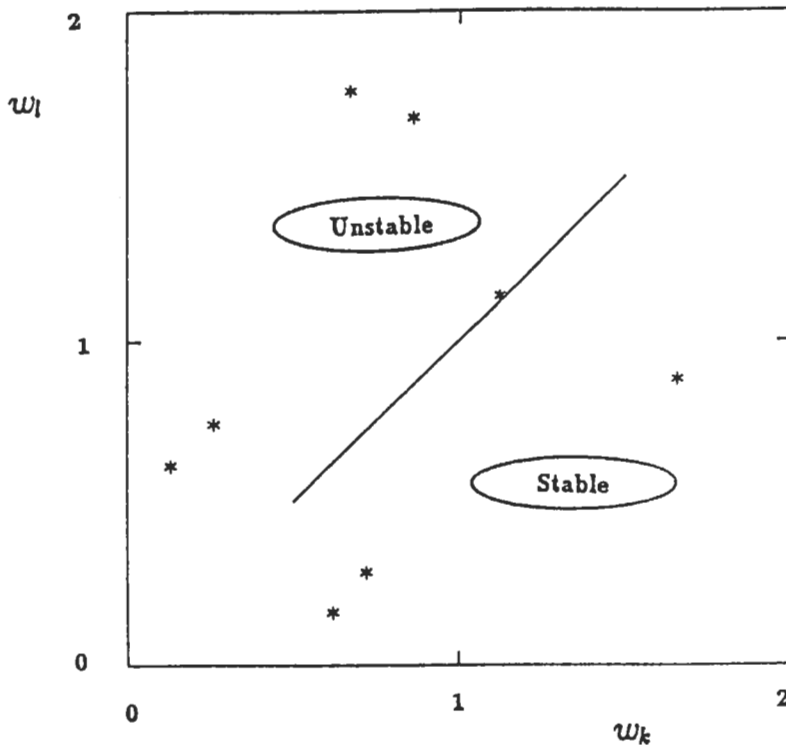


圖 13 擾動初始能譜(非均向性)之穩定度分類。圖中落在 Stable 區域者表穩定類型，落在 Unstable 區域者表不穩定類型。

## 五、討論與結論

最後根據前面結果我們作以下的結論：

1. 魔子穩定度與二種物理因子有關：
  - (1) 初始擾動尺度的大小。
  - (2) 初始擾動能譜(非均向性)。
2. 當擾動是均向性，李亞普諾夫分析結果，魔子不穩定臨界波長約4000公里。
3. 數值歸納得到擾動初始能譜與穩定度的關係如下：對具有相同均向平均尺度( $\delta^2 L < 0$ )之擾動，如果非均向性大於1( $\epsilon > 1$ )為不穩定；小於1( $\epsilon < 1$ )為漸近穩定；等於1( $\epsilon = 1$ )為中性穩定。

由一些數值實驗(McWilliams, 1981; Haines et al, 1989)顯示，摩擦效應會破壞非線性與線性效應之間的平衡，使魔子結構維持完整，在線性作用下逐漸以羅士培波往下游頻散。

雖然摩擦效應使魔子趨於不穩定，但是如果同時考慮瞬變渦流的效應，當渦流回饋基本場的能量恰巧平衡摩擦耗損時，則魔子結構在耗損系統下，仍能維持 (Pierrehumbert, 1984)。這也是本研究認為魔子理論與瞬變渦流兩股思維可以結而為一的重要論證依據。

在結合瞬變渦流與魔子理論時，第一部分研究我們先分析魔子穩定度。從上面討論得到，魔子穩定度由(1)初始擾動尺度的大小，(2)初始擾動能譜(非均向性)兩因子決定。對於尺度因子，我們以李亞普諾夫分析證明了瞬變渦流尺度滿足穩定條件。

至於擾動初始能譜對穩定度的影響，Carnevale et al 雖然指出其重要性，推翻了Pierini與Swater的理論，證明 $\delta^2 L < 0$ 不是穩定的充分條件。但Carnevale並沒有進一步討論能譜與穩定度的關係。這方面，雖然本文在理論方面尚無具體的結論；但，我們提出另一種決定擾動初始能譜的方法[(32)式]；此與Swater的定義[(26)式]比較發現，(32)式不但更能反應擾動的能譜特性；透過數值實驗顯示，(32)式可以度量能譜對穩定度的影響，且數值大小亦可作為擾動能量成長(減弱)的指標。若以此為標準，我們發現瞬變渦流的能譜亦滿足穩定的條件。

雖然，從尺度與能譜分析皆顯示瞬變渦流滿足穩定的條件，印證了本文的假說；即，魔子的初期演變為漸近穩定。然而，瞬變渦流在魔子初期演變的特徵，能量輸送、或收支的計算；以及擾動如何在 $\delta^2 L = 0$ 的限制，穩定度可以保證的條件下，符合Shutts(1983)、Illari(1984)等數值觀測，都是值得探討的問題。這些問題我們在第二部分研究，將作進一步的討論。

此外，在李亞普諾夫分析或非均向性探討時，為了確定李亞普諾夫函數二次變分( $\delta^2 L$ )為守恆量，我們假設擾動是微小振幅，並未考慮當擾動是有限振幅，非線性穩定度的問題。然而，一些統計分析顯示，阻塞期間瞬變渦流的強度超過氣候平均值(Wallace et al, 1988)。因此，考慮擾動為有限振幅，如何應用李亞普諾夫方法分析魔子非線性穩定度，也是有待解決的問題。

## 誌謝

本文在國科會自然處支助NSC80-0202-M002-15計劃下完成。特別感謝大氣科學某一未署名審閱者予以寶貴意見，使本文更加完整。

## 參考文獻

林和, 1988: 平行風切流的非均向化與初始值問題。大氣科學, **16**, 117-132。

鄒治華、林燕枝、郭勉之, 1993: 北半球阻塞高壓的特徵及形成。大氣科學, **20**, 153-172。

Arnold, V. I., 1965a: Conditions for nonlinear stability of stationary curvilinear flows of an idea fluid. *Soviet Math. Dokl.*, **6**, 773-777.

-----, 1965b: A variationl principle for three-dimensional steady-state flows of an idea fluid. *PMM*

*Vol.*, **29**, No **5**, 846-851.

- , 1966: On an a priori estimate in the theory of hydrodynamical stability. *American Math. Soc. Translation Ser. 2*: **79**, 267-269.
- Blumen, W., 1968: On the stability of quasi-geostrophic flow. *J. Atmos. Sci.*, **25**, 929-931.
- Butchart, N., K. Haines and H. C. Marshall, 1989: A theoretical and diagnostic study of solitary waves and atmospheric blocking., *J. Atmos. Sci.*, **46**, 2063-2078.
- Carnevale, G. F., G. K. Vallis, R. Purini and M., Briscolini, 1988: The role of initial conditions in flow stability with an application to modons. *Phys. Fluids*, **31**, 2567-2572.
- Charney, J. G., and M. E., Stern, 1964: On the stability of internal baroclinic jets in a rotating atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **19**, 159-173.
- Charney, J. G. and J. G. Devore, 1979: Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking. *J. Atmos. Sci.*, **36**, 1205-1216.
- Cao, H.-R., T. G. Shepherd, and V. A. Vladimirov, 1993: Application of the Direct Liapunov Method to the Problem of Symmetric Stability in the Atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 822-836.
- Dole, R. M., 1983: The life cycles of persistent anomalies and blocking over the Northern Pacific. *Adv. Geophys.*, **29**, 31-69.
- Farrel, B., 1989: Transient development in confluent and diffluent flows. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 3279-3311.
- Haines, K. and J. Marshall, 1987: Eddy-forced coherence structures as a prototype of atmospheric blocking. *Q. J. R. Met. Soc.*, **113**, 681-704.
- Holopainen, E., and C., Fortelius, 1987: High-Frequency transient eddies and blocking. *J. Atmos. Sci.*, **44**, 1632-1645.
- Illari, H. and J. C. Marshall, 1983: On the interpretation of eddy fluxes during a blocking episode. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 2232-2242.
- , 1984: A diagnostic study of the potential vorticity in a warm blocking anticyclone. *J. Atmos. Sci.*, **41**, 3518-3526.
- Leith, G. E., 1983: Minimum enstrophy vortices. NCAR Ms. 0502/83-2.
- Malanotte-Rizzoli, P. and P. J. Hancock, 1987: Coherent structures in a baroclinic atmosphere. Part IV: A comparison between theory and data. *J. Atmos. Sci.*, **44**, 2506-2529.

- Malguzzi, P. and P. Malanotte-Rizzoli, 1984: Nonlinear stationary Rossby waves on nonuniform zonal winds and atmospheric blocking. Part I: The analytical theory. *J. Atmos. Sci.*, **41**, 2620-2628.
- McIntyre, M. E. and T. G. Shepherd, 1987: An exact local conservation theorem for finite-amplitude disturbances to non-parallel shear flows, with remarks on Hamiltonian structure and on Arnold's stability theorems. *J. Fluid. Mech.*, **181**, 527-265.
- McWilliams, J. C., 1980: An application of equivalent modons to atmospheric blocking. *Dyn. Atmos. Oceans*, **5**, 43-66.
- , 1981: Numerical studies of barotropic modons. *Dyn. Atmos. Oceans*, **9**, 237-280.
- Mets, W., 1986: Transient cyclone scale vorticity forcing of blocking heights. *J. Atmos. Sci.*, **43**, 1467-1483.
- Mullen, S., 1987: Transient eddy forcing of blocking flows. *J. Atmos. Sci.*, **44**, 3-22.
- Pierini, S., 1985: On the stability of equivalent modon. *Dyn. Atmos. Ocean.*, **9**, 237-280.
- Pierrehumbert, R. T., 1984: Forced conrent structures and local multiple equilibria in a barotropic atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **41**, 246-257.
- Shepherd, T. G., 1985: Time development of small disturbances to plane Couette flow. *J. Atmos. Sci.*, **42**, 1868-1871.
- Shutts, G. T., 1983: The propagation of eddies in diffluent jet streams: eddy vorticity forcing of blocking flow fields. *Quart. J. R. Met. Soc.*, **109**, 737-761.
- , 1986: A case study of eddy forcing during an Atlantic blocking episode. *Adv. Geophys.*, **29**, 135-161.
- Stern, M. E., 1975: Minimal properties of planetary eddies. *J. Mar. Res.*, **33**, 1-13.
- Swaters, G. E., 1986: Stability conditions and a priori estimates for equivalent barotropic modons. *Phys. Fluid*, **29**, 1419-1422.
- Wallace, J. M., G.-H. Lim, and M. L. Blackmon, 1988: Relationship between cyclone tracks, anti-cyclone tracks and baroclinic waveguides. *J. Atmos. Sci.*, **45**, 439-462.
- Yanai, M. and Nitta, T., 1968: Finite difference approximations for the barotropic instability problem. *J. Meteor. Soc. Japan*, **46**, 389-403.

## Blocking Study — Modon Stability Analysis, Part I, Theory

Chi-Cherng Horng    LinHo  
Department of Atmospheric Sciences  
National Taiwan University

### ABSTRACT

In blocking studies, the modon theory is one of the more rigorous approaches along the line of local structure. It was supported convincingly by the results from the numerical experiments and observations.

On the other side, the maintenance of blocking needs the feedback mechanism of transient eddies (2-8 days). There are also evidences supported the transient-eddy theory. In this paper we tried to merge these two theories into one consistent conjecture. We investigated theoretical, numerical and observational aspects, explored the feasibility and limitation of our hypothesis.

The modon solution is treated as the zero-order approximation of blocking structure. The longevity of modon will be accounted entirely from the view of stability analysis. The transient eddies, the first-order approximation are incapable of drawing energy from the main structure. On the contrary, if asymptotically stable condition is satisfied, the confluence of modon flow can drain the eddies energy very effectively. By compensating the dissipation, and it's existence will be extended.

The downstream variation of modon solution destroys Hermitianity, hence it calls to consider both discrete modal solution and continuous spectrum. The stability study becomes an initial-value problem. We took the Liapunov approach, to find the necessary and sufficient conditions for modon's stability.

Suppose initial disturbances are isotropic, following Arnold's theory, the second variation of Liapunov function provides the stability criterion. The critical wave length for unstable eddies is near 4000 km. The isotropic eddies shorter than this length cannot destabilize the modon.

But if the disturbances are anisotropic, the anisotropy can be measured by a parameter  $\epsilon$  (see context), decided by the weighting of energy spectrum, it is found that, even when the eddies with the same averaged scale, the flow becomes unstable when  $\epsilon > 1$ , neutral stable when  $\epsilon = 1$  and stable when  $\epsilon < 0$ .

Key Words : blocking, transient eddies, modon, bounded, liapunov direct method, isotropy.