

# 平流傳輸方程的計算：交錯網格之有限差分法

郭鴻基 柳再明\* 周仲島

國立台灣大學 大氣科學系

(中華民國七十九年五月三十一日收稿；六月三十日定稿)

## 摘 要

在環境科學裡現存有許多問題，以平流方程形式的傳送問題是非常重要的。找尋合適的數值方法，來計算平流傳送，是不可避免的問題。

在本文中，我們使用一維平流傳送方程式探討在交錯網格上的平流傳送問題。文中說明在使用Arakawa C網格時，定義通量所應注意的地方。同時指出通量定義不適當，四階中差分法的精確度將降低。最後並提供和四階定差法一致的通量定義。為了避免因計算而產生不合物理的負值，我們也描述了一至三階的正定義法。

關鍵詞：正定義法，差分法，平流方程，交錯網格

\* 中央氣象局

## 一、引 言

隨著大型電子計算機的發展，數值模式在大氣科學的地位愈形重要。建立一個數值模式通常包含兩階段，第一階段是以一組方程式，陳述表達大氣中我們有興趣的動力及物理過程。第二階段，是將這方程組離散化(discretization)，然後以電子計算機來解它。

一般而言，解一組連續方程式(Continuous equations)之數值離散法，可區分為歐勒(Euler)及拉氏(Lagrange)二種。拉氏包括全拉氏及半拉氏(Semi-Lagrangian method)。根據所使用時間積分之技巧及空間導數的估算，歐勒法可分為時間與空間

積分兩部分。時間積分可以是顯式或是隱式，而隱式有全隱式及半隱式。空間的離散方法，一般可劃分成兩大類一為數列展開法，另一為有限差分法。數列展開法多以Galerkin法為主(Haltiner and Williams, 1980)。常用的數列展開法有波譜法及有限元素法等。在有限差分法裡，平流型式多以通量型式表示，原因是此種離散方程式能滿足保守連續流體中的一些積分限制。此外，變數以交錯網格方式(Staggered grid)配置，可以有較好的地轉調整(geostrophic adjustment)。在B、C、D、E四種交錯網格中，目前以C網格被大多數數值模式使用(Arakawa and Lamb, 1977; Schoenstadt, 1978)。

三維平流方程如

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

在流體力學及大氣科學中佔着十分重要的角色，例如當  $q$  可為污染物或水汽的混合比時，(1.1) 代表污染物或水汽之質量不減；當  $q$  為溫度時，(1.1) 代表熱力(內能)方程式；當  $q$  為位渦，(1.1) 為位渦守恆方程。在(1.1) 所描述的大氣現象裡， $q$  場通常包括許多尺度，因此  $q$  的梯度值可小亦可大。以計算方法而言，我們必須同時正確的計算，解析大小尺度的  $q$ 。

在本文中，我們使用一維的平流方程式，在交錯 C 網格點上，探討不同的計算法，透過數值分析及計算，我們強調交錯網格點上，通量計算的重要性。不適當的通量計算，可以使差分法精確度降低。針對美國海軍(Hodur 1982 ; 1987) 及氣象局區域模式，我們提出和四階差分一致的通量計算。為了避免因計算而產生負的  $q$  值，我們亦描述一至三階的正定義分法(positive definite method)。

第二節我們陳述一維平流方程的初始值，以及用以實驗的計算法。數值分析及計算結果敘述於第三節，最後一節為結論及討論。

## 二、研究方法與過程

為了說明各交錯網格差分方程的區別，我們用一維常係數(例  $u=1$ ) 平流方程式進行模擬實驗。方程式為

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

其中  $q$  為一純量，其物理意義可為氣體，污染物混

合比，內能或位渦度等， $u$  為流體運動速度。邊界條件取週期性邊界  $[-1, 1]$ ，定義初始條件為

$$q(x, t = 0) = \exp[-(\frac{x}{0.2})^2] \quad (2.2)$$

方程式(2.1) 及(2.2) 組合而成一最簡化之波動型式之平流方程。常係數的方程式(2.1) 可以改寫成通量型式

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

其中

$$F = uq \quad (2.3)$$

圖1 為本實驗採用的交錯網格型式。要注意的是，通量和速度場定義在同一網格上。而水汽和通量彼此是交錯放置。我們將以通量所在位置附近的水汽值來定義通量，來考慮二階或是四階中差的空間導數。本實驗使用五種方法用來離散(2.3) 式，它們包括不同通量的定義方法及空間導數的估算法。茲分別描述如下：

方法( I )

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = -\delta_x F_i,$$

其中

$$F_{i+1/2} = \frac{(u_{i+1/2} + |u_{i+1/2}|)}{2.0} q_i + \frac{(u_{i+1/2} - |u_{i+1/2}|)}{2.0} q_{i+1} \quad (2.4)$$

方法( II )

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = -(\frac{9}{8} \delta_x F_i - \frac{1}{8} \delta_{3x} F_i),$$

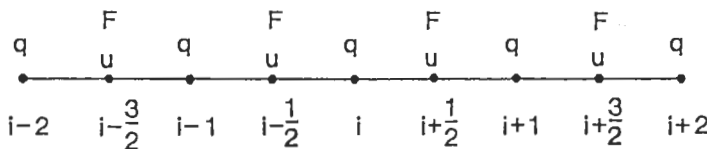


圖1 交錯網格及變數的位置。

其中

$$F_{i+1/2} = \frac{(u_{i+1/2} + |u_{i+1/2}|)q_i}{2.0} + \frac{(u_{i+1/2} - |u_{i+1/2}|)q_{i+1}}{2.0} \quad (2.5)$$

方法(Ⅲ)

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = -\delta_x F_i,$$

其中

$$F_{i+1/2} = \frac{q_i + q_{i+1}}{2.0} u_{i+1/2} \quad (2.6)$$

方法(Ⅳ)

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = -\left(\frac{9}{8}\delta_x F_i - \frac{1}{8}\delta_{3x} F_i\right),$$

其中

$$F_{i+1/2} = \frac{q_i + q_{i+1}}{2.0} u_{i+1/2} \quad (2.7)$$

方法(Ⅴ)

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = -\left(\frac{9}{8}\delta_x F_i - \frac{1}{8}\delta_{3x} F_i\right),$$

其中

$$F_{i+1/2} = \left[\frac{9}{16}(q_{i+1} + q_i) - \frac{1}{16}(q_{i+2} + q_{i-1})\right]u_{i+1/2} \quad (2.8)$$

而

$$\delta_x F_i = \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta x}, \quad (2.9)$$

$$\delta_{3x} F_i = \frac{F_{1+3/2} - F_{i-3/2}}{3\Delta x}.$$

在時間離散方面，方法(Ⅰ)及(Ⅱ)使用向前時間積分，而方法(Ⅲ)、(Ⅳ)及(Ⅴ)則採二階跳蛙時間積分。為了壓抑跳蛙時間積分中的計算模，我們使用Asselin過濾法(Haltiner and Williams, 1980)。阻尼係數取為0.02。值得注意的是，方法(Ⅰ)及(Ⅱ)用一階的上游通量，方法(Ⅲ)及(Ⅳ)則採二階通量。另外方法(Ⅴ)的通量，根據泰勒展開，是四階的精確度。空間導數的估算，不是二階中差法(

方法(Ⅰ)及(Ⅲ))，就是四階中差法(方法(Ⅱ)，(Ⅳ)及(Ⅴ))。因此方法(Ⅲ)及(Ⅴ)在定義通量及空間導數估算上有相同數量級的精確度。在線性平流方程式，方法(Ⅰ)的空間差分型式和一階上游差分型式相同。方法(Ⅱ)及(Ⅳ)包含了通量定義及空間導數估算有不同的精確度。當推展到二維的時候，方法(Ⅴ)在C網格上，仍是一四階的方法，這和Gerrity et al.(1972)的非交錯網格方法，及Campana(1973)B網格的使用相類似。

Hsu 和 Arakawa (1990) 用等熵面為垂直座標來解原始方程模式，文中提出Takacs' (1985) 方法的一般化。這方法有很小的計算類散(dispersion)且保證有正結果。Arakawa 的方法是三階的精確度。我們亦將Arakawa 法納入實驗。Arakawa 法的說明在附錄A。除Arakawa 法外，我們也將測試Smolarkiwicz (1983) 正定義平流法。Smolarkiwicz 法和Arakawa 法相類似，包含有類似預報子-校正子的程序，然而Smolarkiwicz 法的計算較Arakawa 法來得少。Smolarkiwicz 法的說明則在附錄B。

### 三、結果與討論

#### (一) 數值分析

對一維常係數的平流方程式，方法(Ⅰ)使用一階上游差分(upstream differencing)，而方法(Ⅲ)使用二階中差法。有關的解析分析可參考Haltiner及Williams (1980)。我們依類似方法對方法(Ⅳ)及(Ⅴ)的精確度及穩定性質作一研究探討。考慮常係數平流方程式(2.1)的四階空間中差且取跳蛙時間差分如下：

$$\frac{q_m^{n+1} - q_m^{n-1}}{2\Delta t} = -u \left( a \frac{q_{m+1}^n - q_{m-1}^n}{2\Delta x} + b \frac{q_{m+2}^n - q_{m-2}^n}{4\Delta x} + c \frac{q_{m+3}^n - q_{m-3}^n}{6\Delta x} \right) \quad (3.1)$$

其中 $n$ 為時距數而 $m$ 為網格點數，方程式右邊的每一項，都是用來估算 $\partial F/\partial x$ ，為了離散一致性(consistency)， $a+b+c=1$ 。若(3.1)是一四階精確度的數值方法，則二階截斷項必須為零。這暗示著由

$q_{m\pm 1}^n$ ,  $q_{m\pm 2}^n$  及  $q_{m\pm 3}^n$  展開所得泰勒數列項的和

$$a\left(\frac{\partial^3 q}{\partial x^3}\Delta x^3/3!(2\Delta x)\right), b\left(\frac{\partial^3 q}{\partial x^3}\right)(2\Delta x)^3/3!(4\Delta x),$$

及

$$c\left(\frac{\partial^3 q}{\partial x^3}\right)(3\Delta x)^3/3!(6\Delta x), \quad \text{必須爲零。}$$

若

$$a + 4b + 9c = 0 \quad (3.2)$$

則(3.1)的截斷誤差將爲 $O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4)$ 。下面將探討穩定度的問題。使用一般性的符號，我們假設解的型式爲

$$q_m^n = AL^{i\alpha n\Delta t + i\mu m\Delta x} \quad (3.3)$$

並定義下列函數

$$f(\mu\Delta x) = a \sin \mu\Delta x + \frac{b}{2} \sin 2\mu\Delta x + \frac{c}{3} \sin 3\mu\Delta x \quad (3.4)$$

$$f'(\mu\Delta x) = a \cos \mu\Delta x + b \cos 2\mu\Delta x + c \cos 3\mu\Delta x \quad (3.5)$$

將(3.3)代入(3.1)，可得

$$\sin \alpha\Delta t = -\frac{u\Delta t}{\Delta x} f(\mu\Delta x) \circ \quad (3.6)$$

其中假如 $\alpha$ 是實數，由(3.3)所得之解將爲中性，亦即將無減弱或擴增。 $\alpha$ 爲實數的保證是(3.6)右手邊量要小於或等於1。爲了保證穩定度，必須求得 $f(\mu\Delta x)$ 的極大值。令 $f[(\mu\Delta x)_{max}]$ 爲 $f(\mu\Delta x)$ 的極大值。爲了維持所有波數的穩定度，以下條件必須滿足：

$$CR = \left| \frac{u\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1/|f[(\mu\Delta x)_{max}]| \quad (3.7)$$

由分離(3.1)，可推得相速及群速。相速

$$C_F = u * \frac{1}{\mu\Delta x CR} \sin^{-1}[CR * f(\mu\Delta x)] \quad (3.8)$$

群速

$$C_g = u * f'(\mu\Delta x)/(1 - [CR * f(\mu\Delta x)]^2)^{1/2} \quad (3.9)$$

其中CR是Courant number

以一維常係數平流方程，我們可以調整(2.7)，(2.8)成爲(3.1)之形式，由比較係數，方法(IV)可得 $a=13/12$ ， $b=-1/12$ 和 $c=0$ ，方法(V)可得 $a=87/64$ ， $b=-3/8$ 和 $c=1/64$ 。對於不在交錯網格點上的四階差分法(Haltiner and Williams, 1980, p135)， $a=4/3$ ， $b=-1/3$ ，和 $c=0$ 。由上述 $a$ ， $b$ ， $c$ 值，我們可知方法(IV)不滿足(3.2)，因此它不是真正的四階差分法。從(3.8)我們亦可知方法(IV)(V)的 $2\Delta x$ 波動是不移動的。相對於(3.8)的兩個計算解爲物理模和計算模。

方法(V)的群速對於 $2\Delta x$ 波長是負的( $C_g = -\frac{7}{4}u$ )，而 $4\Delta x$ 波長及 $CR=0.7$ 時群速 $C_g \sim u$ 。因爲 $2\Delta x$ 的負群速的關係。計算所產生短雜波，可以在計算區域內向波動上游傳送，使誤差充滿每一部分的計算空間。表一給 $CF/u$ 以 $CR$ 和 $\Delta x$ 的函數值。由表一我們可知方法(IV)只有二階正確性，不具四階正確性，這是因爲通量計算不恰當而引起的。

最後我們分析方法(V)的穩定性，由(3.7)和方法(V)的 $a$ ， $b$ ， $c$ ，我們可以找出 $f(2\mu\Delta x)_{max}$ ，方法(V)的穩定度(stability)爲

$$|CR| = \left| \frac{u\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 0.71 \quad (3.10)$$

(3.10)顯示方法(V)的穩定時距是比二階方法更有限制性。方法(V)時距比二階方法需小29%，這個0.71值和Haltiner和Williams(1980)上的非交錯網格的四階方法是一樣的。

## (二) 數值結果討論

本節中我們陳述數值結果，在時間積分方面我們使用很小的時距，所以計算誤差主要來自空間差分，也就是來自有限差分法。

圖2是當 $t=2.0$ 網格數 $N=32$ ，方法(I)至(V)，及Arakawa法的數值解。由圖2可見方法(III)和(IV)產生類似的結果，方法(I)和(II)也產生類似的結果。而圖2更清楚的指出，方法(V)比方法(III)及(IV)有較好的結果。方法(I)、(II)和Arakawa法產生正定義場。在所有正定義方法中，

表一 CF/u 以CR 和  $\Delta X$  的函數值

Schemes	CR	$2\Delta x$	$4\Delta x$	$6\Delta x$	$8\Delta x$	$10\Delta x$	$12D\Delta x$
Non-staggered 4th Order							
a = 4/3	0.2	0	0.86	0.97	0.99	1.00	1.00
b = -1/3	0.4	0	0.89	0.99	1.00	1.01	1.01
c = 0	0.6	0	0.98	1.03	1.03	1.02	1.01
(IV)							
a = 13/12	0.2	0	0.69	0.86	0.92	0.96	0.98
b = -1/12	0.4	0	0.71	0.88	0.93	0.96	0.98
c = 0	0.6	0	0.75	0.91	0.95	0.98	0.99
(V)							
a = 87/64	0.2	0	0.87	0.97	0.99	0.99	0.99
b = -3/8	0.4	0	0.91	0.99	1.00	1.00	1.00
c = 1/64	0.6	0	1.00	1.04	1.03	1.01	1.01

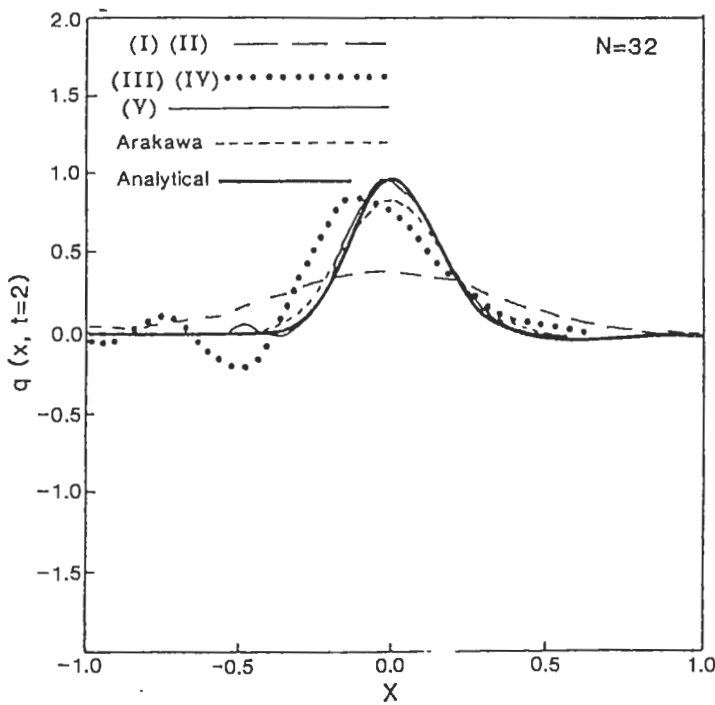


圖2 取  $N=32$  ,  $t=2$  的解析解及數值解曲線。

Arakawa 法最正確。

圖3 表示當  $t = 2.0$ ，所有正定義方法的數值結果。Smolarkiwicz 法須測試不同的  $S$  因子，且有兩個校正步驟。當 Smolarkiwicz 法取  $S = 1$ ，其相位稍微向上風處位移。 $S$  因子的加大對計算結果有負面影響。在計算中，Arakawa 法及 Smolarkiwicz 法二者對質量的保守都相當好。

圖4 顯示當  $t = 2.0$ ，各測試法的  $L_2$  誤差和網格數  $N$  的函數關係

其中  $L_2$  誤差定義為

$$\left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [u(x_j, t) - u_a(x_j, t)]^2 \right\}^{1/2}$$

$u_a(x_j, t)$  是在網格點  $x_j$  和時間  $t$  時的解析解， $u(x_j, t)$

是計算解。由圖4 中很容易看出，不同方法有不同的收斂性質。譬如，方法 (I) 及 (II) 以一階的精確度向解析解收斂，而方法 (III) 及 (IV) 以相同的二階精確度向解析解收斂。如果和三階的 Arakawa 法比較，四階精確度方法 (V) 的優點是很明顯的。由圖2 可觀察到，方法 (V) 的解有較高的精確度，而圖4 更強調這點。以相同網格數而言，方法 (V) 的解在精確度上是方法 (III) 及 (IV) 的解的十倍。就計算時間而言，方法 (V) 僅為方法 (III) 的四倍不到，所以使用四階方法 (V) 對精確度增加是有效率的。方法 (IV) 的四階差分並沒有增加精確度，因此 (IV) 法是没效率的。

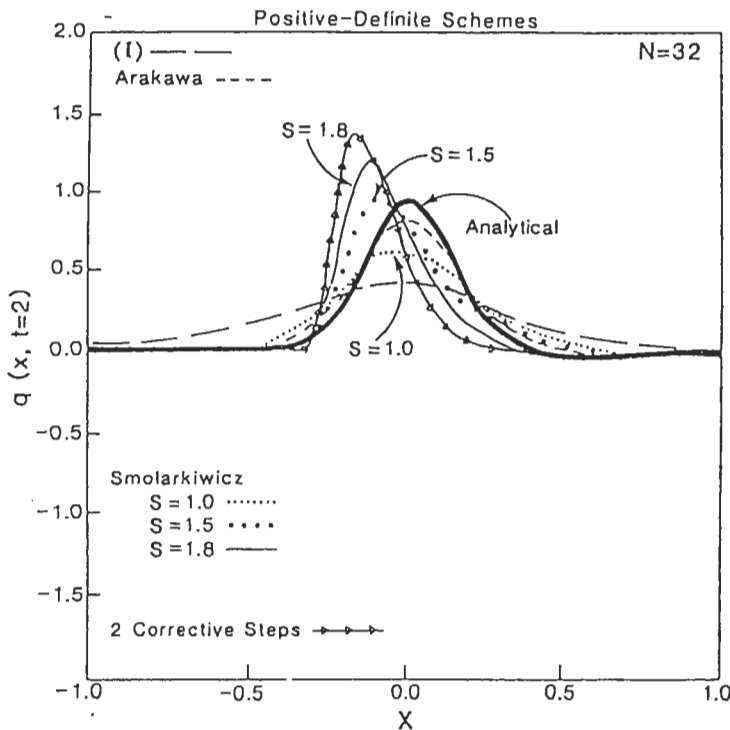


圖3 當  $N=32$ ， $t=2.0$  時，解析解及正定義的數值解。

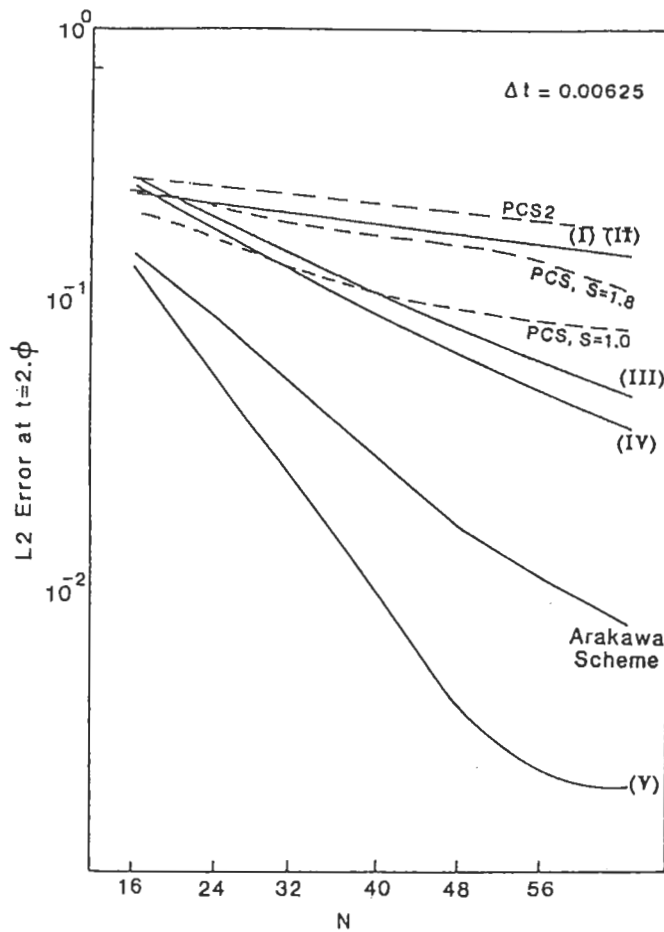


圖4 當 $t=2.0$ ，各測試法數值解的 $L_2$ 誤差，且為 $N$ （網格數）的函數。PCS是Smolarkiwicz法，PCS2是Smolarkiwicz法取兩個校正步驟的結果。

#### 四、結論與討論

使用較正確的模式數值方法減少模式計算誤差，其重要性是不容置疑的。但是在數值方法的取捨，方法的正確性不是唯一的取捨標準。為了更正確的模式計算，方法的效率性應是最重要的。本文中，我們用一維常係數平流方程及高斯(Gaussian)函數的初始值，在交錯網格上來測試四個正定義的方法 (( I )、( II )，Smolarkiwicz法及Arakawa法

)，和三個偶次階精確度法 (( III )、( IV )及( V )) 在平流傳輸問題上所可能產生的問題。測試中顯示，方法( I )及( II )產生完全相同的數值結果。Arakawa法是最好的正定義法，但是計算是昂貴的。相對的Smolarkiwicz法似乎較有效率。然而此方法有二缺點，一是數值解的相位有稍微向上流偏移，另一是須決定 $S$ 因子。對偶次階精確度法中，方法( V )產生最好精確度的結果。當以方法( V )取代方法( III )來使用時，從穩定度的分析顯示時距的大小

須減少約29%。然而就相同數目網格數來說，方法(V)比方法(III)和(IV)產生有十倍多的精確度。而且方法(V)比方法(III)僅需不足四倍的計算時間。

根據本文的計算，我們建議方法(II)及(IV)不應被用於交錯網格模式中。這是因為通量的精確度和時間導數估算的精確度不一致。這兩方法在四階差分的額外計算，並沒有增加模式的精確度。

爲了處理在c網格上的平流方程式，我們建議以方法(V)代替方法(IV)，預期模式的精確度會因替換而增加。

除了本文中所測試的方法外尚有許多其他方法，可應用在大氣模式的平流傳送問題。Rood (1987)給了一個相當完整的敘述。根據Rood (1987)，其他有效率的是假波譜(Collocation method)和半拉氏法。Rasch及Williamson (1989)在半拉氏法中，使用形狀保守內插法(Shape preserving interpolation)，使模擬場維持區域單調性，從而避免產生不合理的負值。因爲半拉氏法可結合有限差分，有限元素及波譜法一起使用，且可使用比歐勒法更大的時距，所以形狀保守半拉氏法很值得注意。

假波譜法效率取決於“指數收斂”(exponential convergence)的性質，類似本文的半波譜法計算，可以在Fulton與Schubert (1987)上找到。

## 五、誌謝

本文承蒙臺大大氣系李濟勝教授之鼓勵動筆寫成。原子能委員會的研究支持，以及二位審查者的寶貴意見，在此一併致謝。

## 六、參考文獻

- Arakawa, A., and V. R. Lamb, 1977: Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model. *Methods in Computational Physics*, Vol. 17, Academic Press, 174-265, 337 pp.
- Campana, K. A., 1979: Higher order finite-differencing experiments with a semi-implicit model at the National Meteorological Center. *Mon. Wea. Rev.*, 113, 1050-1065.
- Fulton, R. S., and W. H. Schubert, 1987: Chebyshev spectral methods for limited-area models. Part I: Model problem analysis. *Mon. Wea. Rev.*, 115, 1940-1953.
- Gerrity, J. P., Jr., R. D. McPherson and P. D. Folger, 1972: On the efficient reduction of truncation error in numerical weather prediction models. *Mon. Wea. Rev.*, 100, 637-643.
- Haltiner, G. J., and R. T. Williams, 1980: *Numerical Prediction and Dynamical Meteorology*, second edition. John Wiley and Sons, New York, 477 pp.
- Hodur, R. M., 1982: Description and evaluation of NORAPS: The Navy operational regional atmospheric prediction system. *Mon. Wea. Rev.*, 110, 1591-1602.
- Hodur, R. M., 1987: Evaluation of a regional model with an update cycle. *Mon. Wea. Rev.*, 115, 2707-2718.
- Hsu, Y. J. and A. Arakawa, 1990: Numerical Modeling of the atmosphere with an isentropic Vertical Coordinate. *Mon. Wea. Rev.*, 118, 1933-1959.
- Rasch, P. J., and D. L. Williamson, 1989: On shape preserving interpolation and semi-Lagrangian transport. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*
- Rood, R. B., 1987: Numerical advection algorithms



and their roles in atmospheric transport and chemistry models. *Rev. of Geophys.*, 25, 71-100.

Schoenstadt, A. L., 1978 : A transfer function analysis of numerical schemes used to simulate geostrophic adjustment. NPS Rept. NPS-53-79-001, 44 pp.

Smolarkiwicz, K. P., 1983 : A simple positive definite advection scheme with small implicit diffusion. *Mon. Wea. Rev.*, 111, 479-486.

Takacs, L. L., 1985 : A two-step scheme for the advection equation with minimized dissipation and dispersion errors. *Mon. Wea. Rev.*, 113, 1050-1065.

### 七、附錄 A : Arakawa 方法

Arakawa 法是以預報子及校正子的型式表示。  
預報子：

$$q_i^* = q_i^n - \Delta t \delta_x F_i$$

其中

$$F_{i+1/2} = u_{i+1/2}^+ q_i^n + u_{i+1/2}^- q_{i+1}^n$$

$$u_{i+1/2}^+ = 0.5(u_{i+1/2} + |u_{i+1/2}|)$$

$$u_{i+1/2}^- = 0.5(u_{i+1/2} - |u_{i+1/2}|)$$

校正子：

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \Delta t \delta_x F_i^*$$

其中

$$F_{i+1/2}^* = u_{i+1/2}^+ \frac{q_{i+1}^* + q_i^n}{2.0} + u_{i+1/2}^- \frac{q_i^* + q_{i+1}^n}{2.0} + G_{i+1/2}$$

$$G_{i+1/2} = -\alpha_{i+1/2} [u_{i+1/2}^+ \beta_{i+1/2}^+ (q_{i+1}^* - q_i^n) - \hat{u}_{i+1/2}^+ \hat{\beta}_{i+1/2}^+ (q_i^* - q_{i-1}^n) + u_{i+1/2}^- \beta_{i+1/2}^- (q_i^* - q_{i+1}^n) - \hat{u}_{i+1/2}^- \hat{\beta}_{i+1/2}^- (q_{i+1}^* - q_{i+2}^n)]$$

$$\alpha_{i+1/2} = \frac{1 + |u_{i+1/2}| \frac{\Delta t}{\Delta x}}{6.0}$$

$$\beta_{i+1/2}^\pm = \frac{1 - 2\alpha_{i+1/2} r_{i+1/2}^\pm}{2\alpha_{i+1/2}} + 1$$

$$\hat{\beta}_{i+1/2}^\pm = 1 - r_{i+1/2}^\pm$$

$$r_{i+1/2}^+ = \frac{(q_{i-1}^n - 2q_i^n + q_{i+1}^n)^2}{(q_{i-1}^n - 2q_i^n + q_{i+1}^n)^2 + q_i^n q_{i+1}^n + \epsilon}$$

$$r_{i+1/2}^- = \frac{(q_i^n - 2q_{i+1}^n + q_{i+2}^n)^2}{(q_i^n - 2q_{i+1}^n + q_{i+2}^n)^2 + q_i^n q_{i+1}^n + \epsilon}$$

$$\hat{u}_{i+1/2}^+ = (u_{i+1/2}^+ u_{i-1/2}^-)^{1/2}$$

$$\hat{u}_{i+1/2}^- = (|u_{i+1/2}^-| |u_{i+3/2}^-|)^{1/2}$$

這裡上標 $n$ 指的是積分過程中第 $n$ 個時階，且 $\epsilon = 10^{-15}$

### 八、附錄 B : Smolarkiwicz 方法

Smolarkiwicz 法亦是以預報子及校正子的型式表示。

預報子：

$$F_{i+1/2} = \frac{(u_{i+1/2} + |u_{i+1/2}|)}{2.0} q_i^n + \frac{(u_{i+1/2} - |u_{i+1/2}|)}{2.0} q_{i+1}^n$$

$$q_i^* = q_i^n - \Delta t \delta_x F_i$$

校正子：

$$\hat{u}_{i+1/2} = \frac{(|u_{i+1/2}| \frac{\Delta x}{2.0} - \Delta t u_{i+1/2}^2)(q_{i+1}^* - q_i^*)}{\frac{\Delta x}{2.0} (q_i^* + q_{i+1}^* + \epsilon)} * S$$

$$F_{i+1/2}^* = \frac{(\hat{u}_{i+1/2} + |\hat{u}_{i+1/2}|)}{2.0} q_i^* + \frac{(\hat{u}_{i+1/2} - |\hat{u}_{i+1/2}|)}{2.0} q_{i+1}^*$$

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \Delta t \delta_x F_i^n$$

這裡  $\epsilon = 10^{-15}$ ， $S$  是一參數用來改進實驗解的品質。

上標  $n$  是指積分過程中第  $n$  個時階。根據 Smolarkiwicz (1983) 指出，爲了改進結果，校正子的階段可反覆運作。

**Computational Tests of Advection Equation:  
Finite Difference on a Staggered Grid**

Hung-Chi Kuo, Tsai-Ming Liu\*, Ben Jong-Dao Jou

Dept. of Atmospheric Science  
National Taiwan University  
Taipei, Taiwan

(manuscript received 31 May 1990; in final form 30 June 1990)

**Abstract**

There are many problems in atmospheric science where a central concern is the manner in which scalars (e.g. trace constituent, potential vorticity and water vapor) is transported by moving fluid. It is important to find a suitable finite difference algorithm on a staggered grid for this problem. In this paper, we use a simple one-dimensional linear advection equation to study the advective processes on the staggered grid. It is illustrated that caution must be taken in defining flux on the staggered C-grid. It is shown that accuracy can be lost in the fourth-order centered differencing if flux is defined improperly. A consistent way of defining flux with the fourth-order finite differencing is presented. To avoid the appearance of negative value, positive definite schemes are also tested.

Key words : positive definite scheme, finite difference, advection equation, staggered grid