

強烈非平行流的絕對不穩定度 與平流不穩定度

林 和 曹志成

國立台灣大學大氣科學研究所

(中華民國七十七年六月二十六日收稿；六月三十日定稿)

摘 要

傳統流力不穩定度問題，大都假設流向均勻，如此求得的不穩定基無區域性偏好，若要解釋某些有利於旋生的位置就顯得不足。非平行流場之擾動與平行流場迥然不同。由於這種不均勻性生成的絕對不穩定度可促使擾動局部成長，而平流不穩定情況下，擾動在 $t \rightarrow \infty$ 會經過測站而不停留，正是解釋擾動區域性的最佳候選。

本文使用正壓模式研究強烈非平行流場的不穩定度，發現非平行性增強到某一程度時，流場由平流不穩定轉為絕對不穩定，擾動在原地呈指數成長。我們同時檢討在初始場增加高頻擾動的影響，以及加入 β 效應或追蹤劑引致的異同，希望本文結果，能部分解釋西南渦移動、停滯的動力因素。

關鍵詞：絕對不穩定度、平流不穩定度、非平行風切流、西南渦。

一、前言

傳統流力對不穩定度的研究，泰半集中在平行風切流 (parallel shear flow) 上，即基本場的流線互相平行而無流向 (streamwise) 變化。如此在正基分析 (normal mode analysis) 時，變數沿流向方向 (e.g; X 軸) 的分量，可以完全從風切方向分離 (Separate) 出來。利用此對稱性質，正基不但沿 X 軸能用週期性函數展開，而且取得固定的空間尺度意義。流向均勻 (homogeneity) 的假設，確實大量簡化了數學過程，但它同時也限制了不穩定理論的適用性。簡言之，正基沿流向的結構，將由初始場極小擾動的隨機分

佈決定。因此，不穩定解可以出現在 X 方向的任何地點。以斜壓不穩定問題為例，倘若中、高緯度的旋生現象，接近 Charney (1947) 或 Eady (1949) 的模式，即綜觀尺度的氣旋由緯向風的垂直風切取得能量。旋生位置，應該圍繞緯度圈均勻分佈。但從實際觀測得知，旋生偏愛亞洲、北美洲東側，即所謂風暴路徑 (storm track) 地區，該區恰好位於噴流條出區，平行流的假設完全不成立。

此外，因地形激發的氣旋，例如阿爾卑斯山的背風氣旋，中國大陸的西南渦 (陶，1986)，皆須考慮到基本場沿流線方向的變化。這方面的研究，最近進展快速，尤其在絕對不穩定 (absolute

unstable) 與平流不穩定 (convective unstable) 的區別上, 特別具有實用價值。

絕對與平流不穩定度的概念, 最早發凡於電漿物理學 (Briggs, 1964)。波動力學很早即發現 (見 Whitham, 1973), 流場中給予一脈衝 (Impulse) 擾動, 往下游會以波包 (wave packet) 的形式傳送, 波包中包含多項尺度相近的正基, 因頻散現象, 互相抵消, 唯有符合 Ray tracing 條件的當地波數 (local wavenumber), 方能脫穎而出。根據 stationary phase 或 steepest descent path 的技巧, (例: Jeffreys and Jeffreys, 1972) 可以導出群速、波能等近似值。現在假設正基具有不穩定性質, 長時間後, 應用頻散波相同的技巧, 可以區分出兩種不同的波包型態, 一種波包停滯原地, 呈指數成長, 稱為絕對不穩定, 另一種波包, 一面移動, 一面成長, 但在任何定點, 只要等擾動經過, 就會趨近平靜, 稱為平流不穩定 (見第二節)。這兩種情形的區別, 對平行風切流並不顯著, 因均勻流場可以沿 X 軸加上任意常數 (伽利略轉換), 而不影響其穩定判據, 所以絕對不穩定與平流不穩定可交換角色, 擾動能量的增長曲線維持不變。但是當基本流場在流向方向有所變化時, 波包可能在能量增長前, 即已移出不穩定區, 絕對或平流不穩定, 將代表兩種截然不同的狀態。

Illari et al. (1981) 利用以上觀念, 解釋阿爾卑斯山背風氣旋停滯或移動的條件, 根據經驗, 背風氣旋有時會在原地潛深, 造成巨大災害, 有時會向下游移動, 軌跡飄忽難測。同樣現象, 也出現在青康藏高原東側的背風氣旋, 即中國氣象學家所謂的西南渦 (陶, 1986), 從嚴冬到初夏, 約有 41% 在四川盆地就消失了, 59% 移出源地, 沿路挾帶豪雨, 一日半內, 可到達台灣上空。如何測定氣旋路徑, 一直困擾著本地區的預報人員。西南渦的形成機制, 可能導源於山後背風槽與氣旋式風切, 加上西南風暖溼的潛在不穩定度與山後沉降靜風區溫室效應, 增溫降壓等綜合因素而引起的。一

且氣旋形成後是否移出源區? 或在原地增長? 大致取決於大尺度基本流場的結構。本文即假設背風氣旋在等熵面的運動, 可以用正壓渦度模式模擬。模式中考慮基本流場的非平行性, 也就是流向的風切變化, 逐漸調整其變化量的大小, 可以發現流場從平流不穩定跳躍成絕對不穩定, 氣旋將從移動轉變為停滯。證明基本流的非平行 (non-parallelness) 確實能主導氣旋的行止。

本文第二節將回顧絕對不穩定度與平流不穩定度的理論背景與特性, 第三節討論模式、基本流場, 第四節描述數值模擬的結果, 第五節是總結與討論。

二、絕對與平流不穩定度

Briggs (1964) 最早從電漿物理研究中發現, 再經過 Merkin (1977) 與 Pierrehumbert (1985) 等人介紹絕對與平流不穩定的觀念到大氣研究, 可說明如下:

若考慮自負無限大到正無限大的區域中, 一度線性波動的演變。假設該系統的頻散關係為

$$\omega = \omega(k) \quad (2.1)$$

ω 為相對波數 k 的頻率

令 ω 為複數, 便可處理不穩定波動。一個波包 (wave packet) 的演變可表示為:

$$\phi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \quad (2.2)$$

$A(k)$ 取決於初始狀態。使用 Stationary Phase Method, 限定 x/t 值, 當 t 趨近於無限大時, 可得到漸近近似 (asymptotic approximation) 如下:

$\phi(x, t) \sim$

$$A(k_s) (2\pi)^{1/2} e^{-i(\pi/4)} \frac{e^{i[(x/t)k_s - \omega(k_s)]t}}{(d^2\omega/dk^2|_{k_s})^{1/2} t^{1/2}} \quad (2.3)$$

其中 $k_s(x/t)$ 決定於

$$\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_s} = \frac{x}{t} \quad (2.4)$$

根據這些推算，沿著 $x/t = \text{常數}$ 的路線追蹤 (ray tracing) 得到成長率： $\text{Im}[(k_s) - (x/t)k_s]$ 。我們感興趣的有兩支路線，第一是根據下式所得到的 k 值，

$$\left. \frac{d\omega_i}{d\omega} \right|_{k_m} = 0 \quad (2.5)$$

注意 ω_i 是擾動的成長率， k 是個實數，為相對於最大成長率的波數。這就是傳統定義的所謂“最不穩定波數”，將它記為 k_m 。從 (2.4) 可知，沿最大不穩定波的路線定義為

$$x/t = \left. \frac{d\omega_r}{dk} \right|_{k_m} \quad (2.6)$$

如此，波包的尖峰 (peak) 以最不穩定正基的成長率長大，而且移動速度為最大不穩定波數估算出的群速。

第二支有意義的路線是，固定 x 且讓時間趨近於無限大，也就是 x/t 趨近於零；自 (2.4)，此路線的 k_s 可由下式決定

$$\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_s} = 0 \quad (2.7)$$

我們將這個特殊的 k_s 記為 k_0 。值得注意的是，由於 $\omega(k)$ 為複數， k_0 亦可能是個複數。根據 (2.4) 式，經過足夠長的時間後，仍留在固定區域

內的擾動形式為

$$\phi(x, t) \sim A(k_0) (2\pi)^{1/2} e^{-i(\pi/4)} \frac{e^{i\omega(k_0)t}}{(t d^2\omega/dk^2|_{k_0})^{1/2}} e^{i(k_0)x} \quad (2.8)$$

因而，特定 x 處的擾動根據成長率 $\omega_i(k_0)$ 長大，我們稱之為“絕對”成長率。即使當 $\omega_i(k_m)$ 為正值時，絕對成長率仍可為負值或零。當 $\omega_i(k_0)$ 為正值時，此系統則稱為“絕對不穩定”。若 $\omega_i(k_0)$ 為負值或零而 $\omega_i(k_m)$ 為正值時，此系統則稱為“平流不穩定”。另外一個值得注意的特性為：由於 k_0 為複數，擾動在空間的某方向，將呈指數成長 (朝向波包的尖峰)。上式更詳細的導出可參考 Merkin and Shafranek (1980)。

我們用 Huerre and Monkewitz (1985) 的兩張圖來說明這兩種不穩定度的不同。在絕對不穩定流場中 (如圖 1a)，波包的邊緣朝兩邊前進，而其間的擾動呈指數成長，路線 $x/t = 0$ (圖 1a 中的垂直軸) 因而必須落於不穩定波包之間。相對地，在平流不穩定流場中 (圖 1b)，波包邊緣朝同一方向前進，路線 $x/t = 0$ 必須落於邊緣以外，且其波數 k_0 必須滿足 $\omega_i(k_0)$ 小於零，換言之，絕對不穩定流場中，每一點擾動均隨時間增長而變得無限大，而平流不穩定場中，擾動一邊前進一邊成長，若立於一固定點上來看，只要時間夠久，擾動終至消失。

以上分析，建立在 WKB 的假設上，即擾動尺度與基本流場流向變化的尺度相差懸殊，其比例以小參數展開，擾動在 X 方向仍然可以用 $\exp(ikx)$ 展開，但波包的 k 為 x 軸的變數，若波包中正基皆為穩定的週期性波動，而且運動方程式可轉換成古典系統 (classical system) 中的 Lagrangia

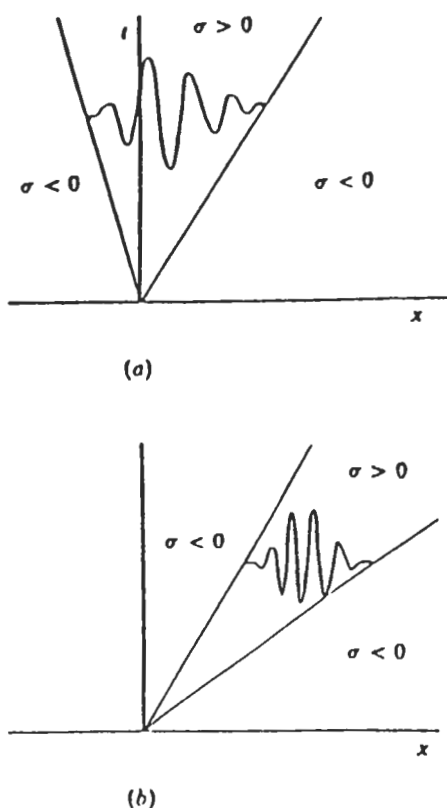


圖 1 示意圖(a)絕對不穩定度
(b)平流不穩定度
(取自 Huerre and Monkewitz, 1985)

，則波動在不均勻介質的傳遞完全由 wave action 的守恆律控制 (見 Whitham, 1973)。若波動為不穩定，仍然可以由 (2.3) 式決定下游變化，但其漸近值須要在源區很遠下游方能實現。所得結果與在地轉流力的應用可參考 Merkin and Balgovind (1983)、Peng and William (1985) 等作品。

我們所關心的動力問題如背風旋生等，屬於強烈非對稱的情況，即基本流場在 x 、 y 方向的风切相去有限，這種問題很難找到清晰的 asymptotic approximation，所以本研究採取數值方法，期望能先期獲知一些結果。

三、非平行基本流場與數值模式

前章所述絕對與平流不穩定度最重要的分野在流線方向的不對稱性。如果不穩定區沿下游出現或隱沒，不穩定基一面移動，一面生長或衰減，或停滯原地長大，基於以上考慮，本章將建立非平行風切流的基本流場，我們採取的是西風噴流條的 Bickley Jet，剖面及流線方向的风切由兩項參數控制，採用的模式及數值方法將介紹如下：

(一) 基本流場與模式

非輻散正壓渦度方程的無因次形式為：

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \phi + J(\phi, \nabla^2 \phi) + \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

ϕ 為流線函數， Z 代表非正壓、非絕熱或地形等效應； β 是科氏參數的南北梯度，速度分量為：

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.2)$$

(3.1) 式對基本流場作線性化可分為：

$$r(x, y, t) = \overline{\phi}(x, y) + \phi'(x, y, t) \quad (3.3)$$

假設 $|\phi'| \ll |\overline{\phi}|$ ，將 (3.3) 式代入 (3.1) 式，再去掉 ϕ' 的二次項，可得

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \phi' + J(\overline{\phi}, \nabla^2 \phi') + J(\phi', \nabla^2 \overline{\phi}) + \beta \frac{\partial \phi'}{\partial x} = 0 \quad (3.4)$$

以上假設 $Z' \sim 0$ ，而定義 \overline{Z} 為維持 $\overline{\phi}$ 在 (3.1) 式的恆定狀態解 (Steady-state solution)。

為了解正壓不穩定度的問題，我們將模式放在長度為 2π 的正方形盒子內，且使用循環邊界 (cyclic boundary condition) 如下：

$$\phi' \left(-\frac{2D}{3}, y, t \right) = \phi' \left(\frac{4D}{3}, y, t \right)$$

$$-D \leq y \leq D$$

$$D = \pi$$

$$\phi' x \left(-\frac{2D}{3}, y, t \right) = \phi' x \left(\frac{4D}{3}, y, t \right) \quad (3.5)$$

$$\phi' (x, -D, t) = \phi' (x, D, t)$$

$$-2D/3 \leq x \leq 4D/3$$

$$\phi' y (x, -D, t) = \phi' y (x, D, t) \quad (3.6)$$

以下說明無因次與因次（以星號表示之）變數間的關係：

$$x^* = Lx$$

$$y^* = Ly$$

$$U^* = U_{max} U$$

$$T^* = L^{-1} U_{max} t$$

$$\beta^* = U_{max} L^{-2} \beta$$

$$\phi^* = L U_{max} \phi$$

非平行流的基本流場為 x 和 y 的函數，風場剖面為 Bickley jet 的形式。 u 如下

$$\bar{u} (x, y) = -\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} = U(x) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{y}{d(x)} \right) \quad (3.7)$$

$d(x)$ 為噴流半寬， $U(x)$ 為 x 處橫越噴流的最大風速。基本流場的流線函數中在邊界 $y = \pm D$ 處設定為常數，故可由 (3.7) 式積分而得，而 (3.6) 式中各項基本流相關的微分值皆可因而解析求得。流線方向的變化來自 $U(x)$ 及 $d(x)$ 的變化：

先定義模式中重要的兩參數 r_1, r_2

$$r_1 = d_{min} / d_{max}$$

r_1 愈小代表非平行強度愈強

$$r_2 = d_{max} / D$$

r_2 愈小表示 y 方向風切愈大

而 $r_1 \times r_2 = d_{min} / D$ ，其值愈小，則表示噴流中心的風切愈強。

$$d(x) = \begin{cases} 1/2 (d_{max} + d_{min}) - 1/2 (d_{max} - d_{min}) \cos(3/2 x) & x < 2/3 D \\ d_{max} & x > 2/3 D \end{cases}$$

$$U(x) = d_{min} x \cot(D/d(x)) / d(x) \quad (3.8)$$

當 $r_1 = 1$ 時，噴流的半寬不隨 x 改變，故成了平行流場，由 r_2 控制其剖面風切值的大小。我們經由 r_1 及 r_2 的改變可控制基本流場流線的非平行強度及剖面風切大小。圖二及圖三，分別為 $r_1 = 1.0, r_2 = 0.2$ 及 $r_1 = 0.3, r_2 = 1/3$ 的兩個例子。

(二) 數值方法

在循環邊界條件下，我們使用準波譜法 (pseudo-spectral method)，利用富立葉函數

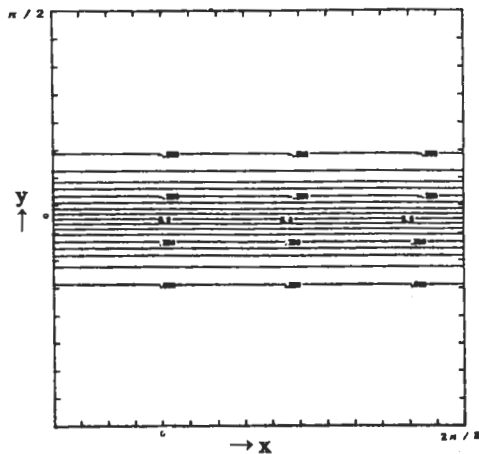


圖2 基本流場的氣流線， $r_1=1.0, r_2=0.2$ ，為平行流場

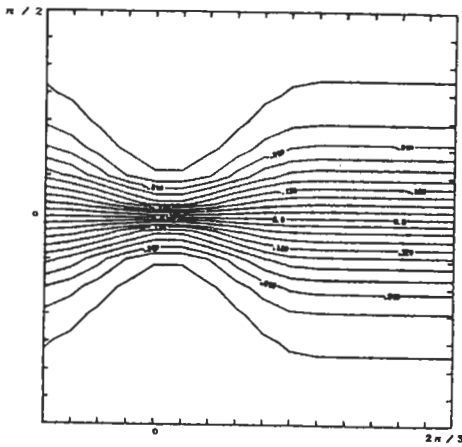


圖3 同圖一，但 $r_1=0.3$ ， $r_2=0.2$ 為平行流場

展開空間的函數；時間上則使用跳蛙格式 (leap-frog)，夾雜半隱梯形格式 (Semi-implicit trapezoidal scheme)，消除計算生成的不穩定基 (computational mode)。

四、模擬結果

(一) 平行流場

為了驗證模式精確程度，我們先嚐試有關平行風切流的穩定度研究。當參數 $r_1=1.0$ 時，基本流場為平行流，(3.7)式簡化成為

$$\bar{u}(y) = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} = \text{sech}^2\left(\frac{y}{r_2}\right) \quad (4.1)$$

首先考慮 $r_2=0.1$ 的例子，將模式時間積分至流場每一點都有相同的頻率及相速為止。換言之，即收斂至最大不穩定的正基。以 $x=0$ 處為中心，取高斯分布的擾動為初始值， x, y 兩方向各取32個網格點。

此實驗不考慮 β 效應，先令 $\beta=0$ 。波包自 $x=0$ 位置向東移動，根據頻散關係，各個正基按照其相速前進， ω_i 大於零的正基，振幅逐漸凌越其他波動。當波包遭遇右邊界時，因其循環條件又自

左邊界進入。波包尖峰，邊走邊呈指數長大，最後以最大不穩定基凸顯而盤據整個流場。圖4為模式結果，擾動呈波數3的正基，且其槽線傾斜，在 $y > 0$ 為東北向西南，在 $y < 0$ 則呈西北向東南 (圖4a)。動量通量 (momentum flux) 為順梯度 (down-gradient) 方向，正壓不穩定基 (barotropic most unstable mode, MUM) 恰好可以獲得最大的擾動能量。能量乃呈指數成長 (圖4c)。若於 $y=0$ 的對稱軸上取間隔 $\pi/2$ 四個等距測站，觀察風場的時間變化。圖4b中，由下往上四站分別為 y 軸上由左迄右的四個測站，可看到擾動向右移動，且呈指數增大。模式算出的相速為0.5，此流場顯然是種強烈不穩定狀況。在此必須註明，如果加入 β 效應，波包進行的方向亦可向東向或停滯，我們更可加入一平移的定值，藉以控制波包的群速，在這種情況下，不穩定基成長可以壓抑，MUM 長大前，波包能維持相當長的時間，平流不穩定可輕易轉換成絕對不穩定。

從理論著手，平行流場的不穩定度，可訴諸固有值的分析。這種傳統的正基分析法，首先將控制方程式線性化，加上特定的邊界條件，求出頻散關係，再做固有值分析：

線性化的正壓渦度方程 (3.4) 如下：

$$\frac{\partial \nabla^2 \phi'}{\partial t} + J(\phi', \nabla^2 \bar{\psi}) + J(\bar{\psi}, \nabla^2 \phi') + \beta \frac{\partial \phi'}{\partial x} = 0 \quad (4.2)$$

x 方向波動解代入上式

$$\text{令 } \phi'(x, y) = \Phi(y) e^{ik(x-ct)} \text{ 得到} \\ (\bar{U}-c)(\Phi'' - k^2 \Phi') - (\bar{U}_{yy} - \beta \Phi) = 0 \quad (4.3)$$

邊界條件為：

$$\Phi(D) = \Phi(-D) \\ \Phi'(D) = \Phi'(-D) \quad (4.4)$$

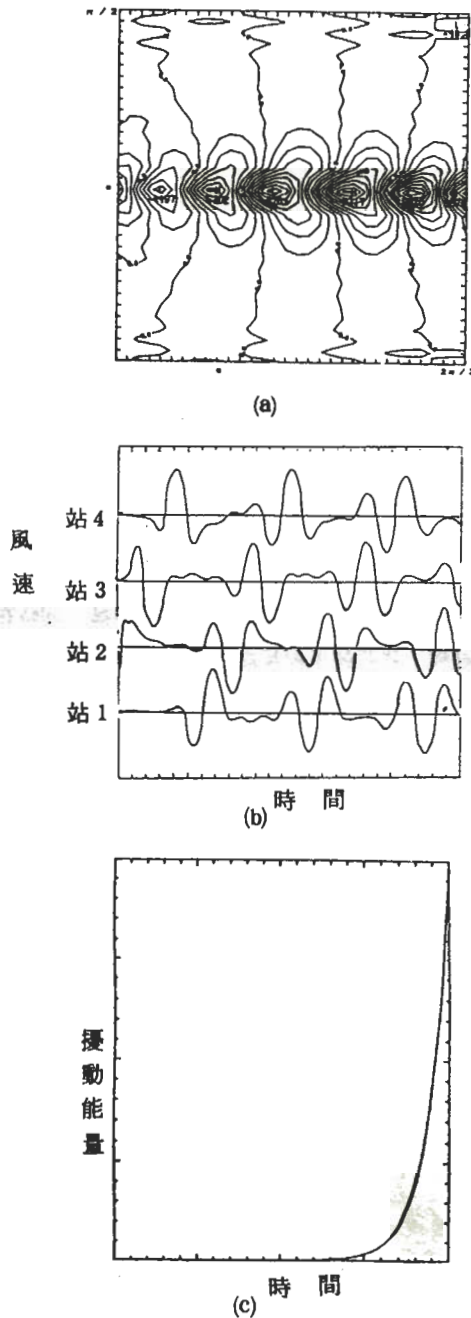


圖 4 平行流場 $r_1=1.0, r_2=0.1, T=20$, 細網
 格模式的結果
 (a)擾動流線圖
 (b)沿中心軸 $y=0$ 四站的風向量時間序列圖
 , 即風速的 phase diagram
 (c)擾動能量—時間圖

以上為 Rayleigh 方程式，自從 Reynolds (1895), Kelvin (1880) 等人分析以來，早已超過了一世紀。

利用有限差分展開 (4.3) 及 (4.4) 式得到如下的形式

$$A \Phi = CB \Phi \tag{4.5}$$

- A, B : 實數矩陣
- C : 複數固有值
- Φ : 固有函數

$C = C_r + iC_i$, C_r 為相速, $\sigma = kC_i$ 為成長率。分析 (4.3) 式找出最大的 σ 值, 結果為:

$$k = 3, \quad C_r = 0.42, \quad C_i = 0.15, \\ \sigma = 0.45$$

圖 5 a 為 y 方向的風場剖面, 圖 5 b 為相位傾斜圖 (phase tilt), 圖 5 c 為固有函數的結構, 相速、成長率與模式結果非常接近, 且其結構與相位傾斜完全相同。

(二) 非平行流場

我們先取 16×16 的粗網格點作實驗, 發現不會改變定性的結果。若以 $r_1 = 1.0, r_2 = 0.1$ 的平行流場 (上節所討論的例子) 作為試驗, 初始值技巧 (initial value technique) 得到的最不稳定基之結構, 與細網格 (32×32 網格點) 所計算的結果, 只有定量上的誤差。比較圖 6 與圖 4, 同為波數 3 的不穩定基, 而 $C_r = 0.42, \sigma = 0.41$, 亦與細網格的結果相差不遠, 此風場剖面為以下系列實驗中最大的風切值。因而我們可利用粗網格模式探討非平行流場的效應。

本研究中, 固定 $r_1 \times r_2$ 值為 0.1, 亦即固定其中心最大南北風切, 逐漸加大東西方向的風切, 調整 r_1 值由 1.0 至 0.2, 也就是漸次扭曲氣流線, 增加其非平行性 (比較圖 3 與圖 7, 幾個不相同的 r_1 值, 但固定 $r_1 \times r_2$ 值的基本流線), 以便了解非平行的效應。

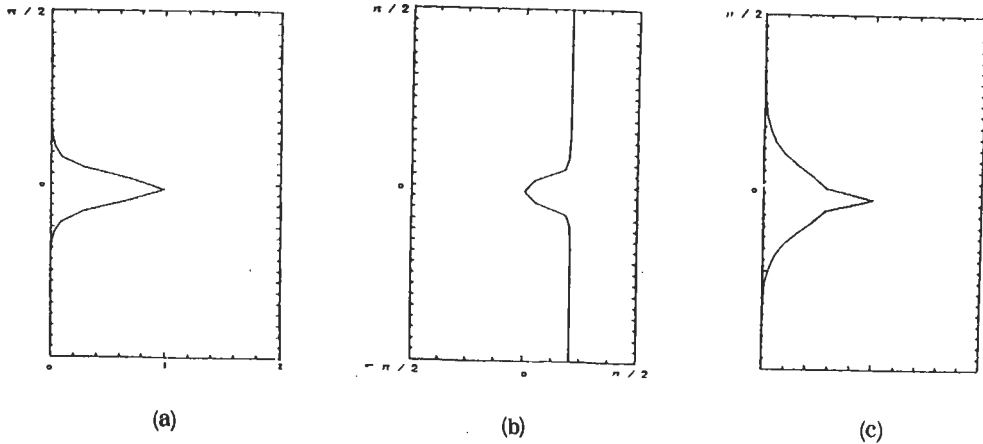


圖 5 平行流場 $r_1=1.0$, $r_2=0.1$ 固有值分析的結果 (a)基本風場剖面
(b)最大不穩定基的相位傾斜圖 (c)最大不穩定基的結構

$r_1 = 0.1$ 的平行流場，可利用傳統的正基分析 (Normal mode analysis)，得知波包的演變過程 (evolution)，但是當噴流東西向的風切加大時，尤其在相當強度的非平行基本流時，無法作尺度分離，故其局部 (local) 不穩定的分析也難有成效。Merkin and Balgovind (1983)，在研究弱 (weakly) 非平行流場的正壓不穩定度中曾指出，波速及成長率會因非平行性加強而減小。本實驗中，較強烈的非平行性亦有此效應。

表一為模擬結果，a 表示噴流中心與東西方向鄰點的速度差分，b 則是南北方向的速度差分，當 r_1 值由 1.0 降至 0.2，表示東西方向速度越加不均勻，也就是非平行流越強。結果顯示非平行性使波速減慢，尤其當 r_1 之值達到 0.44 時，為波動移動與否的臨界值 r_c ，當 r_1 大於等於 r_c 時，雖然擾動總在噴流出區有最大的振幅，但仍保持一定非零的相速。而 r_1 小於 r_c 時，擾動突呈停滯，相速為零，於原地呈指數成長。同樣地，最大的振幅亦發生在噴流出區。波長雖為 x 的函數，但成長率則是單一值，故只有單一的不穩定基突顯而盤據整個流場，但此不穩定基的成長率與固有頻率並非單獨取決於噴流中心的最大風切。因為本實驗中，雖一直固定中心最大風切，但流線方向的風切變

化卻足以改變整個不穩定基的性質與結構。同時在積分過程，我們發現較極端的平行或非平行流場，也就是較大或較小的 r_1 值，需要較少的無因次時間單位即可收斂；而 r_1 值在 r_c 附近的基本流場，則需要較長的時間積分才會收斂。尤其在 r_c 附近的流場，其擾動之整體能量成長，初期與位置相關甚密，呈現週期性的成長率，而週期又恰為波動環繞一周的時間，最終則皆收斂至單一的成長率，

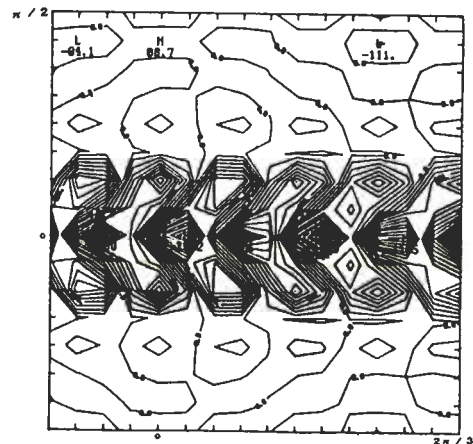


圖 6 平行流場 $r_1=1.0$, $r_2=0.1$, $T=20$ ，粗網格式擾動流線圖

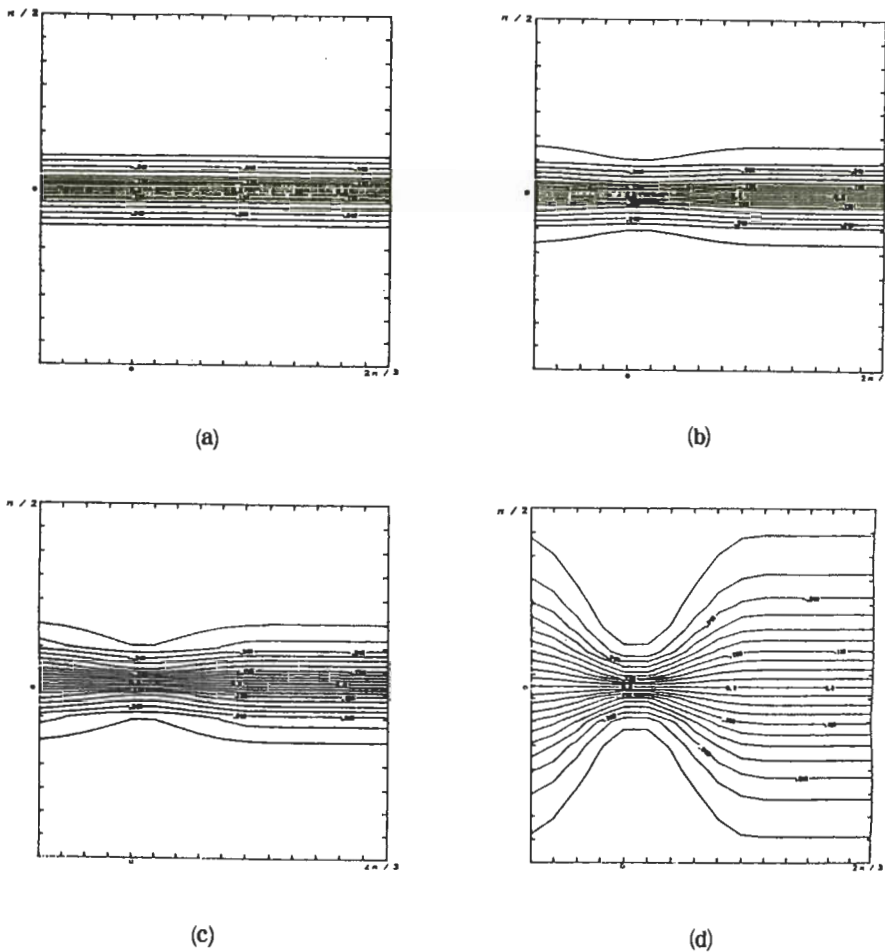


圖 7 幾種不同的基本流場，但固定其中心最大風切 (a) $r_1 = 1.0, r_2 = 0.1$
 (b) $r_1 = 0.8, r_2 = 0.125$ (c) $r_1 = 0.6, r_2 = 0.1667$ (d) $r_1 = 0.2, r_2 = 0.5$

亦即單一的不穩定基。如此則明顯證明，此種情況下，不但為強烈非平行性，亦為強烈不穩定，最不穩定基 MUM 很快從波包中脫穎而出，其長軸垂直於基本流的切線，而且停留在噴流條出口，恰可以透過順梯度 (down-gradient) 流下的動量傳送，使擾動很快的獲得能量，此時 MUM 與波包已經合而為一，表中的相速亦即為群速。

圖 8 為平行流場中，擾動在軸線 $y = 0$ 上的結構圖，擾動很快就形成波數 3 的形式，且具有一定的頻率，一邊前進，一邊呈指數成長，正如前述的平流不穩定度。但再看另一極端的例子 (圖 9)， $r_1 = 0.2, r_2 = 0.5$ 的非平行流場 (或者 r_1

< 0.44 的流場)，擾動由噴流上游經過中心，然後停滯於出區，形成一局部性 (localized) 擾動，且呈指數成長。根據第二節所提及，這是種絕對不穩定度，但此不穩定基不僅相速為零，群速也為零。圖 10 為測站風向量的時間序列，在 $y = 0$ 的軸線上取四個間距為 $\pi/2$ 的測站 (參看圖 7)，由左至右，分別表示於圖 10 中的上至下。我們選出四個不同流場，分別為 $r_1 = 1.0, 0.44, 0.43$ 及 0.2 ，從風向的時間序列圖，很容易估算出相速，尤其當 r_1 跨越 0.44 值時，有趣的現象發生了：擾動突然停滯於原地成長。因而氣流非平行性為平流不穩定度轉變成絕對不穩定度的主宰因素。換言

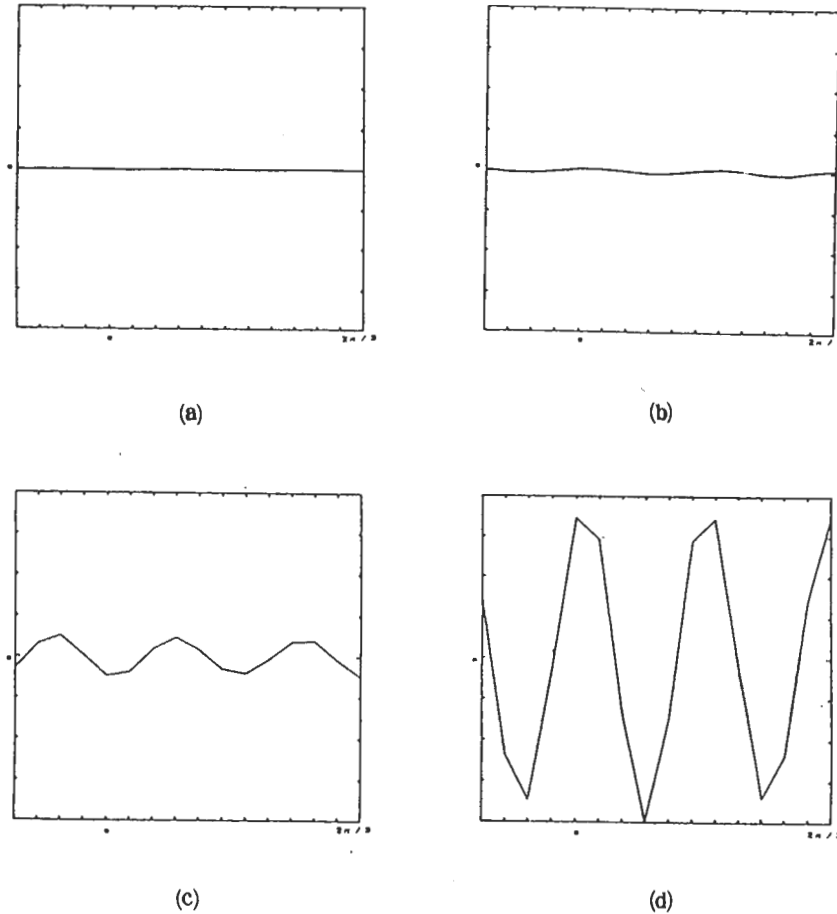


圖 8 平行流場 $r_1=1.0$, $r_2=0.1$ 軸線 $y=0$ 上的擾動結構

(a) $T=5$ (b) $T=10$ (c) $T=15$ (d) $T=20$

之，正壓過程中，最不穩定基的移動與否和流場的非平行強度息息相關。這種絕對不穩定基，正如我們想像的：不同的初始狀態，亦可得到相同的結果，譬如隨機分佈或者局部性的擾動（localized perturbation），都得到完全相同的不穩定基（圖 11），成長率及相速不變。若將初始值反號，可得到相位相反的停滯擾動，但振幅大小、結構則完全不變。所以只要初始值取適當的符號，就可得到成長的氣旋或反氣旋。這兩種現象可對應到天氣學上停滯性的旋生與阻塞高壓。

採取細網格式，相當於增加初始場擾動在高頻的分量。由於波與波之間連續性較高，因而波動的傳遞（propagation）與不穩定（instabi-

lity）同時扮演吃重的角色。比起粗網格式，單一頻率、成長率的不穩定基，在短時間內較難突顯而出。

本節中，將對兩組不同 $r_1 \times r_2$ 值作研究：第一組 $r_1 \times r_2$ 為 0.1，中心風切較強；第二組 $r_1 \times r_2$ 為 0.2，中心風切較弱。作法與順序延續前述的方法，固定噴流中心最強的风切強度，再逐漸調整氣流線，使其偏離平行流，看看較高次系統（higher order system）中，非平行強度對不穩定度的影響。模式結果顯示在表二及表三之中。表二為 $r_1 \times r_2 = 0.1$ 的結果；表三為 $r_1 \times r_2 = 0.2$ 的結果。事實上，除了平行流場外（也就是 $r_1 = 1.0$ 的流場），其餘非平行流場積分時，無

表 一

r1	流向風切(a)	橫截風切(b)	相速	成長率
1.0	0	1.83	0.422	0.405
0.8	0.105	1.83	0.335	0.440
0.6	0.135	1.83	0.314	0.310
0.44	0.247	1.83	0.305	0.230
0.42	0.265	1.83	0	0.280
0.4	0.286	1.83	0	0.300
0.2	0.64	1.83	0	0.205

流向風切： $(\bar{U}_{i,j}^{\max} - \bar{U}_{i+1,j}^{\max}) / x$

橫截風切： $(\bar{U}_{i,j}^{\max} - \bar{U}_{i,j+1}^{\max}) / y$

論較弱或較強的非平行性，皆未呈單一的固有值，且成長率呈週期震盪。這因為增加了自由度 (degree of freedom)，波包中的正基數目亦增加，最不穩定基很難出人頭地，故下表中的 C 當為群速。吾人取震盪的中間值列於下表：

有幾件事值得注意的：無論是 Merkin 和 Balgovind (1983) 處理的弱非平行性正壓不穩定度，或 Pierrehumbert (1984) 處理的非平行斜壓不穩定度，他們得到的都是單一的固有頻率值及成長率，而我們卻得到不盡相同的結果。第一：固有頻率值無法收斂到單一值；第二：擾動的能量雖呈指數成長，但即使長久積分，亦無法令非平行流場的成長率收斂，成長率具有一定週期、一定振幅震盪著，而此週期又大約為擾動環繞模式區域一週所需的時間。顯然的，這其中可能有許多成長率相近的不穩定基一起成長，且與擾動所在位置有關。成長率的振幅隨著非平行性增強而加大，在平行流場則收斂到單一值。無論如何，我們仍能看出相速及成長率的趨勢。非平行改變了固有值，使相速減慢，成長率降低。而在本實驗中，早已固定中心最大風切，所以不穩定基並非單獨決定於噴流中心最大風切，而與流線方向風切變化量密切相關。Merkin and Balgovind (1983) 的研究亦有此現象，但 Pierrehumbert (1984)，研究出的局部不穩定基 (local mode) 則決定於中心最強斜

壓區的絕對不穩定度；全球不穩定基則對平均的斜壓性極為敏感。雖然 Merkin 和 Balgovind 證實非平行性有減慢相速及成長率的效應，但我們的結果很難斷定是否來自於平均風切強度的降低。比較二組的相速，發現相速與非平行性強度相關，對風切強度不太敏感。但是，成長率對風切強度卻極為敏感。平行流場中，每一地區的不穩定度都相同，也由於擾動是屬於平流不穩定，它可以在離開右邊界時經由左邊界再度進入，重新得到相同大小的可用能量，故振幅並無偏好的地區；但非平行性加強的結果，使擾動逐漸局部化 (localized)，能量最大的區域發生在噴流出區，並非中心。圖 12 為 $r1 = 0.2$ 、 $r2 = 0.5$ 流場中，積分 60 個單位時間後擾動的流線，明顯看出：振幅在噴流出區達極大值。注意下游地區，由於頻率之故，高低壓會隨

表 二 $r1 \times r2 = 0.1$

r1	流向風切	橫截風切	波數	相速	成長率
1.0	0	1.83	3	0.50	0.51
0.8	0.105	1.83	2	0.38	0.33
0.6	0.135	1.83	2	0.31	0.30
0.4	0.286	1.83	1-2	0.29	0.13
0.2	0.64	1.83	1	0.17	0.07

表 三 $r1 \times r2 = 0.2$

r1	流向風切	橫截風切	波數	相速	成長率
1.0	0	0.783	1	0.46	0.23
0.8	0.052	0.783	1	0.39	0.19
0.6	0.135	0.783	1	0.30	0.14
0.4	0.285	0.783	1	0.29	0.10

時間交替主宰，不同於粗網格點的結果。在非平行流場中，擾動的相位仍保有不穩定基的傾斜， $y > 0$ 處為東北、西南走向， $y < 0$ 處為西北、東南走向；譬如圖 13。比較圖 4 (a)、12、13 三個不同流場不穩定基的流線圖，非平行性使波數由 3 轉為 2，再轉為 1，即將擾動尺度逐漸放大。

此處細網格點的結果，並不像粗網格點能得到單一的正基，且相速亦不為零。可能原因如下：粗

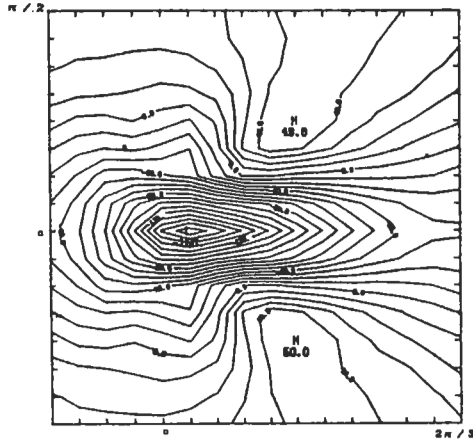


圖9 基本流場 $r_1=0.2$, $r_2=0.5$, $T=20$ 的擾動流線圖

網絡解析度較低，波數較少，波譜連續性較低，單一頻率、成長率的不穩定基容易突顯；而粗網絡點則不然，前者無法解析的一些小波可能扮演了重要的角色，小波移動快速，不斷從右邊界進入左邊界，連續經過不穩定區取得能量，而使整個波包的振幅起伏不定。基本上，此較高次的系統中，同時有數個成長率相近的不穩定基成長，且隨著 x 不同有不同的不穩定基主宰，因而很難找到單一固有值。

(二) β 效應

首先研究平行流場 $r_1=1.0$, $r_2=0.1$ 的 β 效應。此時可利用 4.2 的方法，解出各個不同 β 值，所對應最大不穩定基的固有值，結果如表四：

表 四

β	波 數	相 速	成長率
0.0	3	0.43	0.45
0.2	3	0.42	0.44
1.0	3	0.37	0.41
1.5	3	0.34	0.37
2.0	4	0.40	0.33
2.5	4	0.38	0.33

由表四可知， β 項在這種平行流場下扮演的角色，可歸納下列幾點：

- (1) β 項有穩定流場作用，成長率隨 β 增大而降低。這可以解釋成因 momentum flux 隨基本流的渦度梯度成正比，西風流中， β 項與 $(-U_{yy})$ 項符號若相反，增加 β 值，即為減少渦度梯度。
- (2) β 值小時，波動的最不穩定基維持定值（本例波數為 3）但當 β 大於某值（本例 β 為 1.7 時），波數由小增為大（本例變為波數 4）。
- (3) 在相同的最大不穩定波數下， β 增加，相速降低，但當波數由小變大的同時，相速突增，但過了此轉換點後，波數又維持不變， β 再大時相速又降低。

再取非平行流場 $r_1=0.8$, $r_2=0.25$ ($r_1 \times r_2=0.2$) 為例，以資比較。但由於變數無法分離，我們可依舊使用數值模式積分。結果如表五：

表 五

β	波 數	相 速	成長率
0.0	1	0.39	0.19
0.2	1	0.36	0.14
0.5	2	0.42	0.09

本實驗的非平行性並不強，氣流線扭曲不嚴重，所以較接近平行流。幾點事實：

- (1) β 有穩定流場的作用，成長率隨 β 增加而遞減。
- (2) 由於 β 的增加，最不穩定波數由小變大。
- (3) 波數固定下的相速隨 β 增加而減少。
- (4) 前節提到當 $\beta=0$ 時，非平行流場長時間積分後，其能量的成長率呈震盪現象。而本實驗發現 β 愈大，成長率的振幅愈趨近於零，也就是 β 效應使單一的不穩定基較易突顯。

定性而言，前三點與平行流是一致的，唯獨第 (4) 點的現象為非平行流所特別擁有。

爲了更了解 β 項在非平行流場的作用，再取一段較強烈的非平行流場 $r_1=0.6$, $r_2=0.17$ (

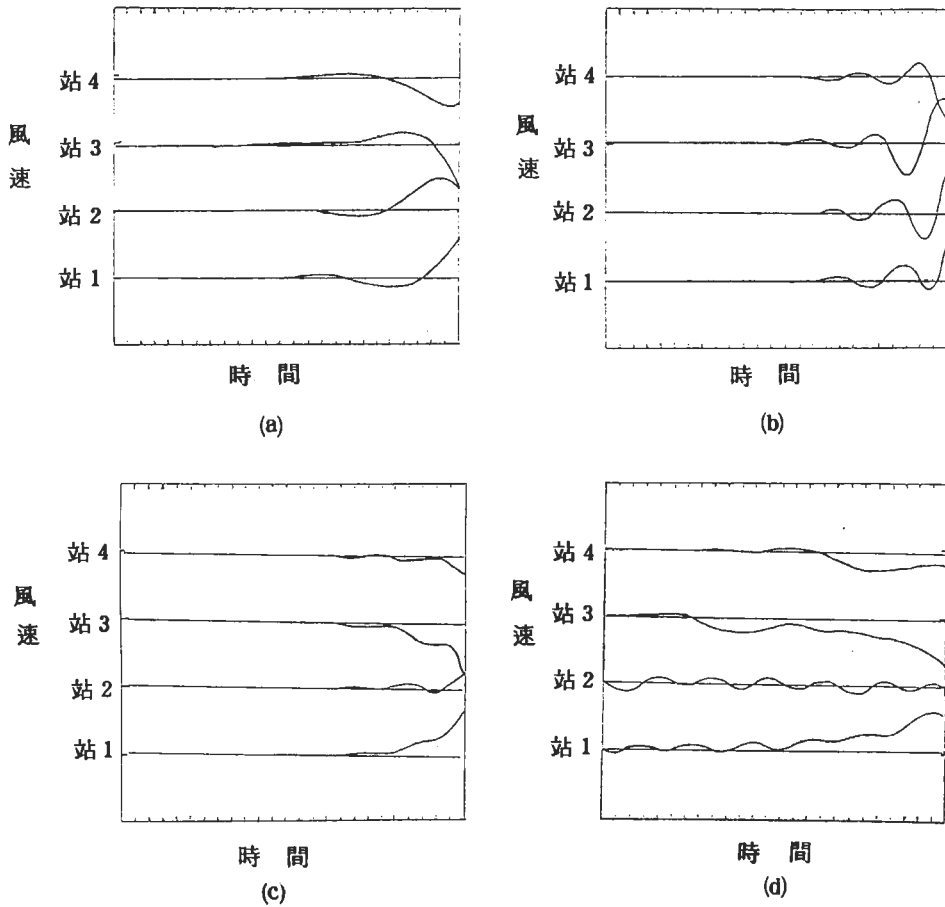


圖10 風向量時間序列 ($r_1 \times r_2 = 0.1$) (a) $r_1 = 1.0$
 (b) $r_1 = 0.44$ (c) $r_1 = 0.43$ (d) $r_1 = 0.2$

$r_1 \times r_2 = 0.1$)，結果如表六：

表 六

β	波 數	相 速	成 長 率
0.0	2	0.31	0.30
0.2	2	0.33	0.25
0.3	2	0.38	0.22
0.6	3	0.35	0.20

歸納下列三點結果。(1)、(2)點與前並無二致，

(3)則迥然不同。

(1) 穩定流場。

(2) 雖然非平行流性可使原來的波數變小，但夠大的 β 值，仍可將波數縮短。

(3) 波數不變時， β 增加相速，而大波轉為較小波動時，卻與弱平行流的效應完全不同，相速反而減少了。這與局部不穩定度觀察到的結果完全相反。

(四) 追跡劑 (tracer)

二維流體中，不與流體產生化學變化或溶解的被動追跡劑 (passive tracer)，代表動力場的純粹平流效應。所以追跡劑與二維渦度有極類似的關係，尤其在穩定狀態特別顯著。但渦度場為速度場的函數，透過渦度梯度項獲得擾動能量，當渦度梯度項 (流向、橫截) 變得重要的時候，渦度場將呈現與追跡劑場背道而馳的發展。本實驗中，分別

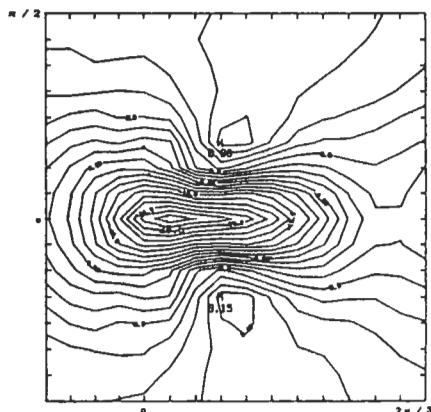


圖11 與圖9同，但初始值取隨機分布

於平行流場 ($r = 1.0, r = 0.2$) 及非平行流場 ($r = 0.6, r = 0.33$) 內放置濃度 Q 的追蹤劑。為了比較不穩定度的影響， Q 值取為初始擾動的渦度場。

由於追蹤劑不與平均流場交互作用，除了濃度重新分配外，總濃度是保持不變的，同時追蹤劑沿流線的積分亦為守恆。但正壓渦度方程中的擾動，由於不穩定度的影響，會有不同正基的偏好，*enstrophy* 會改變。

追蹤方程式如下：

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial Q}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad (4.6)$$

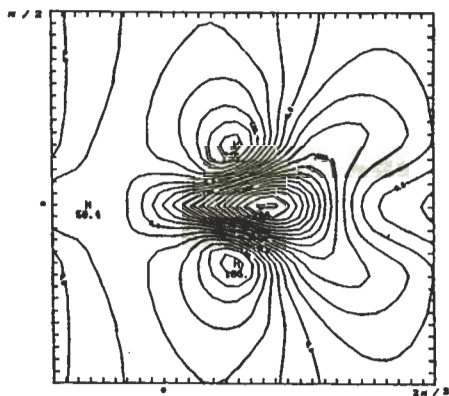


圖12 $r_1=0.2, r_2=0.5$ 的基本流場， $T=60$ 時擾動的流線圖

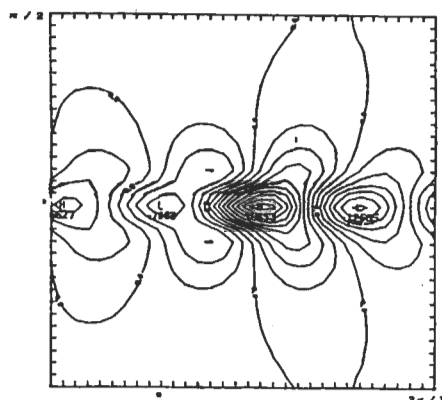


圖13 $r_1=0.6, r_2=0.17$ 的基本流場， $T=40$ 時擾動的流線圖

正壓渦度方程：

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial q'}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial q'}{\partial y} + u' \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0 \quad (4.7)$$

令 $Q(x, y, 0) = q'(x, y, 0)$ ，則可知正壓渦度方程的前三項正好與追蹤方程式相同，後面兩項才是不穩定度的來由。

平行流場中， $r_1 = 0.1, r_2 = 0.2, V = 0$ ， $\partial \bar{q} / \partial x = 0$ ，故追蹤方程式簡化成 $\partial Q / \partial t + \bar{U} \partial Q / \partial x = 0$ ，為線性平流方程式。平

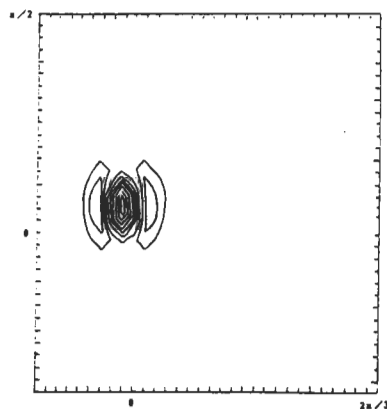


圖14 擾動渦度場的初始值，或是追蹤劑初始的濃度分布

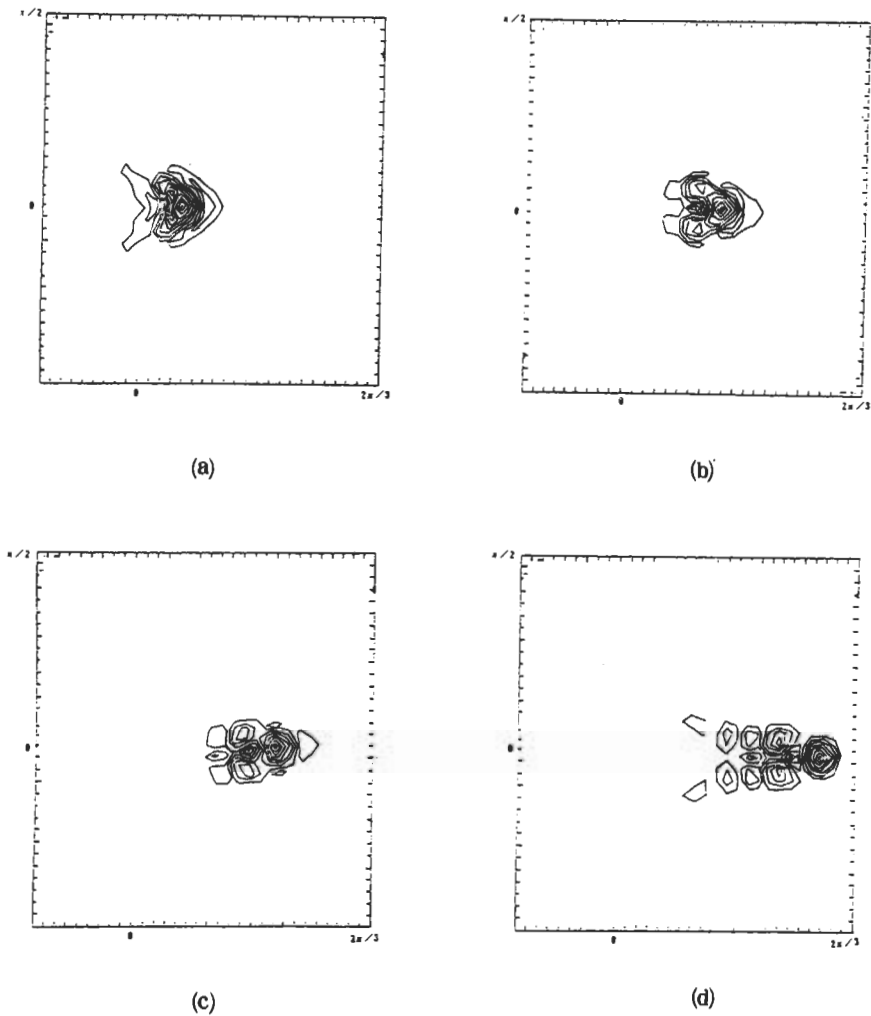


圖 15 平行流場中 ($r_1=1.0, r_2=0.2$)，追蹤劑的濃度分布
 (a) $T=1$ (b) $T=2$ (c) $T=3$ (d) $T=4$

流的速度就是平均流場的速度。由於 Bickley Jet 的風場分佈，中心的風速較兩旁為快，追蹤劑的濃度分布不久即朝 $X > 0$ 方向凸出 (圖 15 a)， $Y > 0$ 的相位傾斜為西北朝東南， $Y < 0$ 的相位則東北朝西南。而且傾斜軸會隨著時間趨於水平，見圖 14 (a , b , c , d , e)，尤其到了 $T=4.0$ 時，追蹤劑的濃度分佈形成割離 (cut off)。

在線性化的正壓渦度方程中，由於基本流場溫度梯度，即 (4.7) 式最後一項提供不穩定度的來源，故擾動的能量與 enstrophy 會改變。初期由於擾動尚未長大， v' 值太小，最後一項可忽略，

因而擾動的渦度分佈類似追蹤劑 (圖 16 a)。但相位傾斜與追蹤劑類似的正基，代表 momentum flux 逆梯度 (up-gradient) 傳送，擾動能量會反饋基本流的噴射軸中心，擾動能量會立刻消散。相位相反的正基會很快得到能量而顯現出來。16 b 與 15 b 比較，追蹤劑的相位隨時間傾斜得愈發厲害，但正壓渦度方程式的擾動則有相反的趨勢，即傾斜愈小。尤其在波包的後緣，相位形成完全相反的傾斜 (圖 16 c)。長時間積分結果，最大不穩定基凸顯，與追蹤劑的結構迥然不同，此乃由於 (4.7) 式最後一項使然。

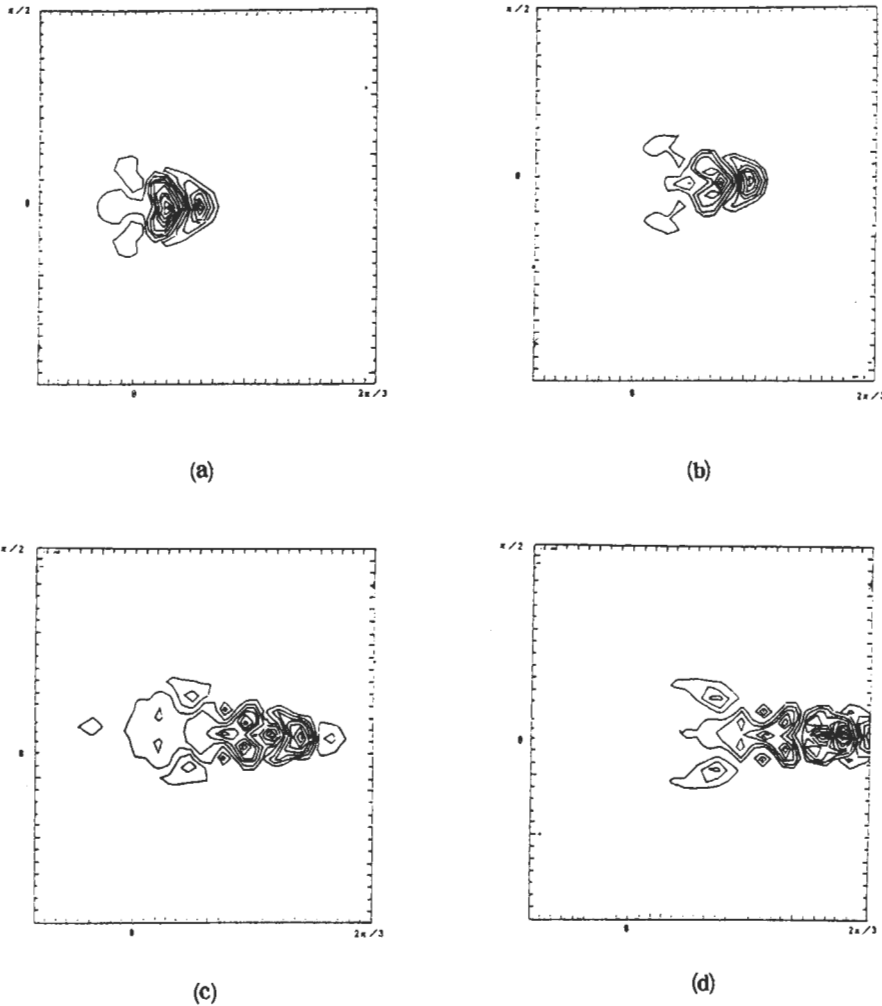


圖 16 平行流場中 ($r_1=1.0$, $r_2=0.2$)，擾動的渦度場演變
(a) $T=1$ (b) $T=2$ (c) $T=3$ (d) $T=4$

非平行流場中 $r_1=0.6$, $r_2=0.33$, $V \neq 0$, $\partial q / \partial x \neq 0$, 故追蹤劑平移效應來自 U 及 V , 而擾動的不穩度除了來自 Y 方向的风切, 亦來自流線方向的风切。

因平均速度的減小, 使追蹤劑 X 方向的平移較平行流場為慢。追蹤劑在噴流入區往中心集中, 出區則往兩旁打散。由於這種效應, 追蹤劑到了噴流出區, 相位的傾斜較平行流場減緩, 不易看見割離現象, 比較圖 17 b 與圖 15 b, 圖 17 c 與圖 15 c 可知。但 Y 方向的风切仍然維持 Y 軸以北為西北朝東南的相位傾斜, 以南為東北朝西南。

擾動渦度場在這種流場中, 初期亦與追蹤劑一致(比較圖 17 a 與圖 18 a), 但其後緣逐漸發生變化, 相位慢慢轉向相反方向的傾斜, 而其前緣則因進入極弱不穩定區, 形成與追蹤劑酷似, 這點是與平行流場整體改變較不同的。但長時間後, 擾動一再經過不穩定區, 正基獲得足夠能量, 終致以相反於追蹤劑之相位傾斜(18 d)。

五、結論

平行風切流的不穩定研究雖然已進行多年, 但

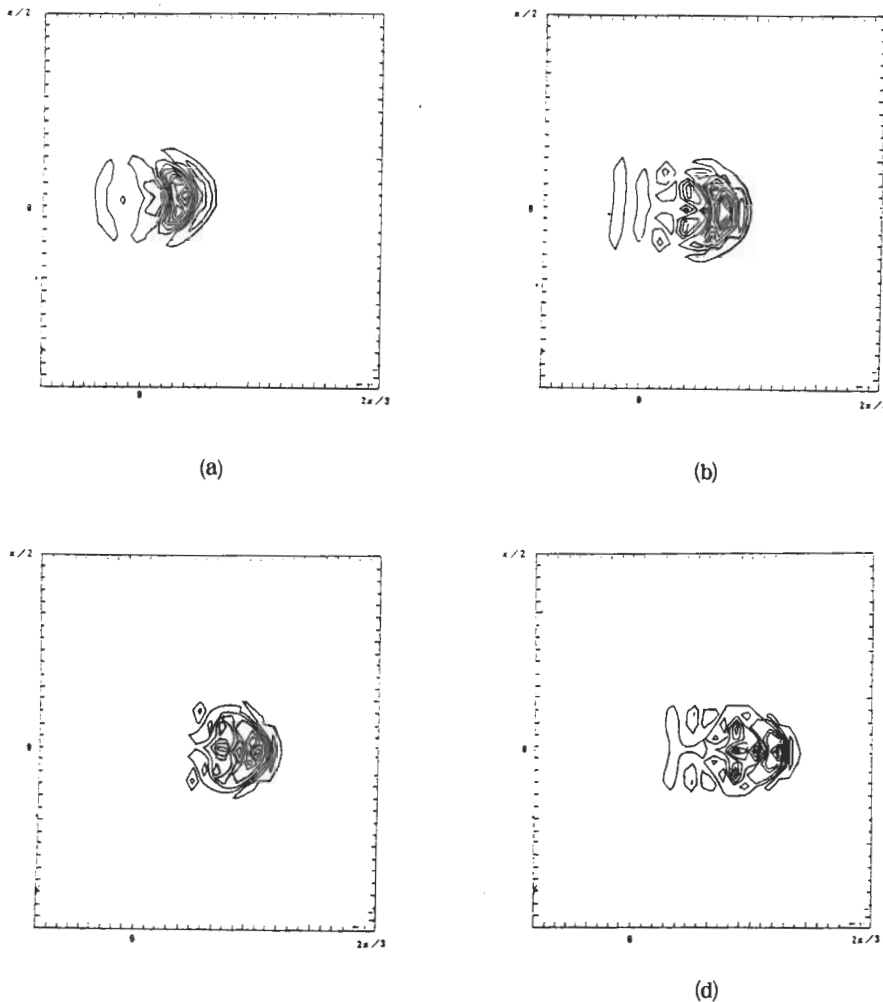


圖 17 非平行流場中 ($r_1=0.6, r_2=0.33$), 追蹤劑的濃度分布
 (a) $T=1$ (b) $T=2$ (c) $T=3$ (d) $T=4$

大氣中觀測到的現象，絕大多數受到流向風切的影響。基本流場的非平行性能決定擾動移動的速度、相位，又因為下游不穩定區分佈不均勻，所以擾動的位移和其能量取得密切相關。有時候擾動駐留原地，振幅呈指數增加，稱為絕對不穩定，有時候擾動雖然成長，但移動快速，測站在擾動經過後，歸於風平浪靜，稱之平流不穩定。

流力實驗處理的空間不穩定度 (spatial instability) 問題，很接近後者；例如正基分析 $e^{-k(x-ct)}$ 的解，我們可以考慮 k 為 complex value 的情況，即振幅沿流向增大。(為了

滿足邊界條件，這類問題必須以初始值型態處理) 雖然空間不穩定度與傳統的時間不穩定度 -- 假設 k 在為實數， C 為複數 -- 經過群速轉換後完全一致 (Gaster , 1962)，但空間不穩定的表達方式往往能提供更簡潔合理的描述。

尤其當基本流場沿流向變化，縱使在不穩定的情況下，擾動會發生停滯現象，當流向風切遠小於剖面風切時，這種現象會在下游遠處發生，如果不穩定條件微弱，我們可以使用 ray tracing 的技巧，計算從平行不穩定轉變成絕對不穩定的過程，第二章已描述弱非平行流場的理論。但是當流向風

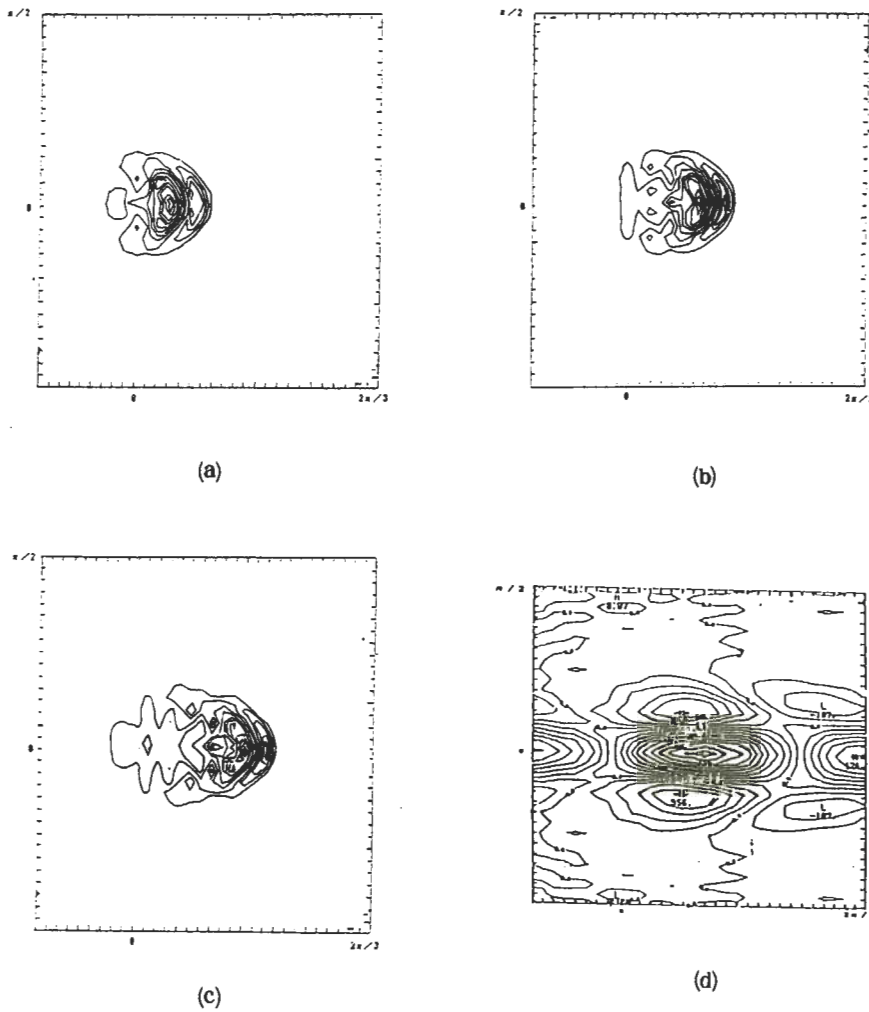


圖18 非平行流場中 ($r_1=0.6, r_2=0.33$)，擾動的渦度場演變
(a) $T=1$ (b) $T=2$ (c) $T=3$ (d) $T=25$

切與水平風切相等時，即強烈非平行流狀況下，近似展開將難以達成，數值模擬可以先期獲得結果，本文即採取正壓Bickley，其氣流的模式，計算擾動演進的行為。

我們解決一正方形區域內的渦度方程式，初始放入一高斯分佈的擾動，為了檢視其不穩定度，採取 x 和 y 皆為週期邊界的條件。分別對粗及細網格作研究。實驗步驟是固定中心最強的风切，經由兩個參數控制，將流場由平行逐漸彎曲至非平行，看看非平行性造成的影響，除了對局部不穩定度 (local instability) 的修正外，尚有不同機制

的不穩定度生成。

實驗的一些結果如下：

- (1) 在粗網格的解析下，發現氣流的非平行性主宰著氣旋或反氣旋的移動與否，當 r_1 達到 r_c ($= 0.44$) 以下的值時，流場由平流不穩定度轉為絕對不穩定度。此時波動中最不穩定基很快獲致能量，成為停滯波 (stationary wave)。振幅呈指數增加波，形成橢圓，長軸與基本流風切垂直，位於噴流出區。
- (2) 細網格中，非平行流場的擾動，無法積分至單一的不穩定基，成長率隨時間呈固定振幅的震

邊，這是因為新增加的快速短波，每次繞場一圈即會從不穩定區汲取基本流的可用動能。而且非平行流場愈強，振幅就愈大。

- (3) 細網格中，非平行流場中，波動振幅的最大值發生於噴流出區，且非平行愈強，擾動動能越集中。
- (4) 非平行性使不穩定基的相速及成長率均減小。
- (5) 在本模式的各個不同風場剖面中， β 均有穩定流場的功能，而且會抑制長波的發展，使最不穩定波數增加。
- (6) 弱非平行流場的最不穩定度基，可由於 β 的加大更易突顯。
- (7) 平行流場或弱非平行流場中， β 有減少相速的作用，但到了波數轉變點時，相速以羅士培波性質之故，增加東進相速。但在強非平行流場中，則完全相反。波數不變時，相速因 β 而加速，而波數變大時，相速反而減小。

正壓大氣非平行流的強度可決定發展中的氣旋或高壓是否移動。由觀測得知，阻塞高壓的發生與基本氣流場位置相關很大，此點有待深一層的探討。而我們有興趣的西南渦移動問題，生成機制也許屬於斜壓或熱力方面，但其路徑則可能與正壓的非平行效應有關，目前正進行個案分析，以印證本文數值模擬的結果。

誌謝

本研究在國科會專題研究計劃NSC 77-0202-M 002-04 支持下完成，特此致謝。

參考文獻

- 陶詩言等，1986：中國氣候新論，明文書局。
- Bretherton, F.P. and C.I.R. Garret, 1969: Waves in Inhomogeneous moving media. *Proceedings of the Royal Society of London*, A302, 529.
- Briggs, R.J., 1964: Electron-stream interaction with plasmas, *Research Monograph No. 29* Cambridge, Mass: M.I.T. Press.
- Charney, J.G., 1947: The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. *J. Meteor.*, 4, 135-152.
- Eady, E.J., 1949: Long waves and cyclone waves. *Tellus*, 1, 33-52.
- Gaster, M. 1962: A note on the relation between temporally increasing and spatially increasing disturbances in hydrodynamical stability. *J. Fluid. Mech.* 14, 222-224.
- Huerre, P. and P.A. Monkewitze, 1985: Absolute and Convective instability in free shear layers. *J. Fluid Mech.* 159, 151-168.
- Illari, L., P. Malguzi and A. Speranza, 1981: On breakdown of the westerlies. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 17, 27-49.
- Jeffreys, H. and Jeffreys, B.S., 1972: *Methods of mathematical physics*. Cambridge Press.
- Kelvin, L., 1880: On a disturbing infinity in lord Rayleigh's solution for waves in a plane vortex stream. *Nature*, 23, 45-46.
- Merkin, L., 1977: Convective and absolute instability of baroclinic eddies. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 9, 129-157.
- , and M. Shafranek, 1980: The spatial and temporal evolution of localized unstable baroclinic disturbances. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 16, 174-206.
- , and R. Balgovind, 1983: Barotropic instability of weakly nonparallel zonal flows. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 25, 157-190.
- Peng M.S., and R.T. Williams, 1986: Spatial instability of the barotropic Jet with slow streamwise variation. *J. Atmos. Sci.*, 43, 2430-2442.
- Pierrehumbert R.T., 1984: Local and global baroclinic instability of zonally varying flow. *J. Atmos. Sci.*, 41, 2141-2162.
- Reynolds, O., 1985: On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Phil. Trans. Roy. Soc. A186*, 123-164.
- Whitham, G.B., 1973: *Linear and nonlinear waves*. Wiley Interscience press.

THE ABSOLUTE AND CONVECTIVE INSTABILITIES OF STRONGLY
NON-PARALLEL SHEAR FLOW

LinHo *Tsao Chi-Chen*

Department of Atmospheric Sciences,
National Taiwan University

(manuscript receive June 26, 1988; in final form June 30, 1988)

ABSTRACT

The traditional flow instability problems are based on the assumption that the stream lines are parallel to each other. The resulted unstable mode will have no preference on any particular location streamwise. Yet the observed cyclogenesis always occur on some selected regions. Therefore the perturbations of non-parallel flow would differ from that of parallel flow in many fundamental ways. Due to this spatial inhomogeneity the so-called absolute instability can stay and grow at some locations, while the convection instability indicates that the growing wave packet will pass by a station eventually. The above criterion provides a possible explanation for regional perturbation.

This study will use a barotropic model to study the instability of a strongly non-parallel flow. When we increases the non-parallelness, the flow jumps from convective instability to absolute instability, then the perturbations will stay at the unstable region, grow exponentially.

Key words: Absolute Instability, Convective Instability, Non-parallel Shear Flow, Southwest Vortex.