

平行風切流的非均向化與初始值問題

林 和

國立台灣大學大氣科學系

(中華民國七十七年一月七日收稿；六月十日定稿)

摘 要

平行風切流中，對區域集中的擾動之瞬變演化，傳統的特徵分析完全束手無策；其實，Rayleigh 方程式中基本機制只有兩項，即不均衡平移與扭轉。均向性因此受到破壞，相位軸可能傾向或垂直於風剖面，但這兩種效應可以經過阿諾限則連結在一起，所以非均向變化必須同時包括這兩項。而且暗示非均向過程可以透過動能，旋能在波譜的傳遞予以解釋。

本文將選擇週期性邊界的 Sin 噴射流作為基本流場，這種風切流本身對擾動而言處於指數型穩定狀態但擾動能量不一定守恆。我們使用解析及數值方法觀察均向渦旋在基本場中逐漸變形的過程。發現非均向平移的效果加諸擾動渦度場如同加諸被動追蹤劑，相位軸順風切傾側，動量通量朝逆梯度方向進行。至於基本場的渦度梯度項則將相位軸扭往垂直風剖面的方向，擾動旋度通量為順梯度進行，這是風切流不穩定度的來源。

我們證明若初始狀態為統計均向，則此時動能、旋能皆處於最低位階，顯而易見，擾動能量將會開始增加，本研究將延伸到 WKB 解的近似行為上。

關鍵詞：均向性、初始問題、平行風切流、連續波譜。

一、前言

平行風切流 (parallel shear flow) 的穩定度問題雖然是流體最古老的課題之一，但最近這方面的研究又顯出新鮮的活力。以前的成果絕大部份集中在離散正基 (discrete normal mode) 的搜尋與分類上，這一組解答除了能提供指數成長的鑑定 (criterion) 外，並不能描述集中於區域的初始場進化過程。這裡面的關失分為兩部分，一是大部分平行風切流如 Couette flow 或

Eddy problem 同時具備連續性波譜 (continuous spectrum)，這組解答能夠在消失前成長一個次方 (Farrell 1982, Boyd 1983, Tung 1983, McIntyre and Shepherd 1987)，有關初始值問題尤其在指數型穩定流的情況下必須將連續性波譜加予考慮。另外一項原因是縱使離散正基能驗明正身，但一叢離散正基 (波包 wave packet) 往下游的發展卻往往違逆個別的特性，很可能一束指數成長的正基因相位干擾而其和趨向穩定，所以我們要區別區域性與全球性的不穩定狀

態，此即絕對穩定度與平流穩定度的觀念 (Merkin 1977, Pierrehumbert 1984, 1986, 林和與曹 1988)。此外，在指數性穩定流中個別的特徵函數並無太大意義，它們結集的當地近似解，如群速等性質方能在物理空間實現，根據 Farrell (1982) 的看法，大部分氣象海洋問題都應該從初始值觀點著手較符合實情，最近幾年這一類研究針對背風旋生 (Illare et al, 1981)，季風低壓 (Lindzen et al 1983, Peng et al 1986)，暴風路徑 (Pierrehumbert, 1984) 等現象都提出了令人滿意的解釋。

本文將處理平行風切流中 \sin 噴射流的初始值問題。所以選擇 \sin 剖面的原因不只因為大氣、海洋中常觀察到這樣的基本場，且因 \sin 噴射流在週期邊界條件時 ($0, 2\pi$) 特徵函數指數型穩定，離散正基不會很快得到能量脫穎而出，很適合做為平行風切流初始問題的範例。本文將顯示： \sin 噴射流雖然簡化但具備二維風切流最重要的兩項機制：即不均衡平移與扭轉效應，均向初始擾動的演化完全根據這兩項機制拉長，傾斜、調適，從此激發的動能、旋能通量決定擾動的穩定度。本文將嘗試說明這兩項機制個別數學解，動力過程及彼此內在的制衡關係。我們使用數值模式觀察均向擾動的初始變化，藉以說明以上的基本機制。

我們並採取隨機均向初始場以求取 \sin 風切流的氣候動力性質，希望這一類研究能賦予初始值研究更普及化的物理意義。本文發現，均向場處於動能、旋能的最低階狀態，這項判據證明 \sin 噴射流 (週期邊界) 將呈現非指數性不穩定成長。

二、動力性質

(a) 不穩定度與離散正基

平行風切流經線性化後擾動流線方程式如下：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U}(y)\frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \phi + \bar{U}''(y)\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

此即 Rayleigh 方程式 (Rayleigh, 1880)，式中 $\bar{U}(y)$ 代表 X 方向平均而無變化的基本場， $\phi(x, y, t)$ 為二度空間中的擾動，這裡二度空間的假設可以直接推廣到三度空間 (Squire, 1933)。

當 y 方向邊界設為固態牆 (即 $\phi = 0$ 時) 時，Rayleigh 證明 (1) 式中擾動呈指數成長的必要條件為 U 剖面具有轉折點 (Inflection point, $\bar{U}'' = 0$)。Lin (1955) 解釋 Rayleigh 鑑定的原因：若渦旋 (vortex) 沿環境渦度梯度方向移動，渦度守恒律會促使擾動質點以慣性震盪 (inertial oscillation) 的姿態回歸原處。這種恢復機制只有在環境渦度梯度為極大或極小值處方才失效。Howard (1961) 的半周理論 (semicircle theory) 更進一步的延伸 Rayleigh 判據，他證明不穩定固有值在複數空間的上下限將由 U 的極大極小值決定。

然而 Rayleigh 鑑定僅為必要條件。Tollmein (1935) 隨後舉出著名的反例：當 $\bar{U} = \sin y$ 且 $0 \leq y \leq \pi$ 時，雖然 U 剖面有轉折點但流場仍舊穩定。Tollmein 加入充分條件如下：若對稱風切流的中性穩定基存在，則使用 perturbation 方法可以找到不穩定解。上例我們若將 $\bar{U} = \sin y$, $\phi = \Phi(y)e^{i\alpha(x-ct)}$ 代入 (1) 式，假設 $-\pi \leq y \leq \pi$ ，則

$$(\sin y - c) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) \Phi + \sin y \Phi = 0, \text{ 且 } \Phi(-\pi) = \Phi(\pi) = 0 \quad (2)$$

中性穩定基即可很容易找出如下 (e.g., Drazin and Reid, 1981)：

$$\begin{aligned} \Phi_c &= \cos(1/2y), \\ \alpha_c &= (3/4)^{1/2}, \\ Cs &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

如果 (1) 式解 $C \neq Cs$ ，在臨界層 (critical layer) $y = y_c$ 處 $U(y_c) - C = 0$ 且 $U'(y_c) \neq 0$ 則 y 應該是一般性孤點 (

regular singular point), 屬於這一族的解有兩支:

$$\Phi_1 = (y - y_c) - \frac{\tan y_c}{2} (y - y_c)^2 + \frac{1}{6} (\alpha^2 - 1) (y - y_c)^3 + \dots$$

$$\Phi_2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2} - \tan^2 y_c\right) (y - y_c)^2 + \dots = \tan y_c \Phi(y) \cdot \ln(y - y_c)$$

y_c 或 C 值可以由 Φ_1, Φ_2 代進邊界條件, 固定 α 值後求出, 以上解在臨界層的不連續性必須再引進摩擦項 (Lin, 1955) 及非線性項 (Benny and Bergeron 1969) 方能圓滿解決。

本節討論的方法皆針對離散正基 (discrete normal mode) 而言, 事實上, (2) 式運算子 (operator) $L = (\sin y - c) (d^2 / dy^2 - \alpha^2) + \sin y$ 並非 self-adjoint, Φ_1 與 Φ_2 缺乏 Orthogonal 的性質。

(b) 週期性邊界條件

(2) 式中南北方向為牆的槽流邊界條件 (假設 $-\pi \leq y \leq \pi$) 若改為週期性邊界條件:

$$\Phi(-\pi) = \Phi(\pi) \tag{4}$$

則不穩定判據完全改觀。(2) 式中將只容許 anti-symmetric 的解, 而 $\cos(1/2y)$ 不能符合 $\Phi(-\pi) = \Phi(\pi)$, 所以 Tollmien 的充分條件無法達成。故 $\sin y$ 噴射流對槽流不穩定, 對週期性邊界則為穩定。

上述判據亦可以用二度空間紊流理論中動能/旋能守恒律得致, 這是 Arnold 保守量的廣泛應用之一 (Lin Ho, 1985a)。

(c) 初始問題與連續性波譜

以上討論皆假設(1)式的解以離散正基的形式出現, 但 Rayleigh 方程式若經過 Laplace 轉換來取代 $\psi = \Phi(y) e^{i\alpha(x-ct)}$ 之傳統解法 (Case, 1960):

$$\psi(x, y, t) = (1/2\pi) \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[(1/2\pi i) \int_{\epsilon - i\alpha}^{\epsilon + i\alpha} e^{i\alpha x + pt} \tilde{\psi}_{\alpha, p}(y) dp \right] d\alpha \tag{5}$$

其中括弧內積分 ϵ 的 Bromwich contour 將選擇平行於 P 的虛數軸且位於奇點右邊, 則(1)式可寫成:

$$\left(\sin y - ip / \alpha \right) \left(\tilde{\psi}_{\alpha, p}'' - \alpha^2 \tilde{\psi}_{\alpha, p} \right) + \sin y \tilde{\psi}_{\alpha, p} = (-i/\alpha) F(y) \tag{6}$$

式中 $F(y) = (\Phi(0) - \alpha^2 \Phi(0))$ 即初始時的渦度值。很明顯的, 離散正基是(6)式中左邊 homogeneous 部份的解; 即因(5)的反轉換中

$$\tilde{\psi}_{\alpha, p}(y) = \int_{y, t}^{y^2} G(y, y_0; s) \left[\psi(y_0; 0) / P + i\alpha \sin y \right] dy_0 \tag{7}$$

Green function $G(y, y_0; s)$ 中 pole 所提供的 residues 產生, 而分母 $P + i\alpha \sin y$ 的 zeros 構成一組新的解答, 沿著 $\sin y$ 剖面 P 可以有連續值。如此連續性波譜能夠滿足任意平滑 (smooth) 的初始條件。

但 $P + i\alpha \sin y = 0$ 的條件設定連續基必須穩定, 因此限制了連續基的成長, 值得注意的是連續基必須為指數型穩定並不意味連續基的能量

必須為定值或消滅。對某類特定初始狀況，連續基仍然可能呈代數成長。這種情形對週期性邊界的 sin 噴射流具有特別的物理意義。

大氣與海洋中時常觀察到 sin 剖面的基本場，槽流兩側硬牆的邊界條件並不適用。由能量分析 (Lorenz, 1967)，我們確定大氣中正壓 (指數) 穩定為常態。對外力激發的擾動而言，離散波譜中不穩定解將為空集合，他們往下游的發展包括連續基。其實，若不考慮特徵函數的大域 (global) 性質，二度空間的運動過程非常單純，由 Rayleigh 方程顯示，擾動受兩種效應控制——即基本場對擾動渦旋的不均衡平移與扭轉。這兩種機制都會讓擾動流線變形，但受了 Arnold's 保守量的限制，它們破壞均向性 (isotropy) 的變形軸方向垂直且互相調適。下節在採取進一步闡述這過程之前，我們先介紹二度空間動能、旋能的譜密度 (spectral density) 分析在不穩定研究的應用。

(d) 譜密度分析

如上所述，指數性穩定流中特徵函數缺乏物理空間實現的能力，這種情形下，為了分析擾動隨時間的尺度演化，我們可以用傳統的富利葉轉換，同時在 X, Y 方向展開，即根據週期性邊界條件，允許 Φ 以 $\sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha, \beta}(t) e^{i(\alpha x + \beta y)}$ 形式展開。定義方程式 $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ 則 A 可簡寫成 A_{β} 。

此處必須注意 $e^{i(\alpha x + \beta y)}$ 並非 sin 噴射流的特徵函數，但是 $\{ e^{i(\alpha x + \beta y)} \}$ 構成一組完整的 (complete) 正交基集合 (Orthogonal set)，即任意平滑初始條件皆可用此集合表示，而 A_{β} 的演化將包容不同頻率 (連續、離散) 疊加的總合，所以 A_{β} 定義的擾動波譜將顯現二度空間完整的尺度及非均向性的變化。

(1) 式將以下式取代：

$$\frac{\partial}{\partial t} A_{\beta} + \frac{Y_{\beta+1}}{k^2(\beta+1)} A_{\beta+1} + \frac{Y_{\beta-1}}{k^2(\beta-1)} A_{\beta-1} = 0 \tag{8}$$

式中係數 $Y = -i\alpha(1-k^2)$ ，實現條件 (reality condition, 即 Φ 經富氏轉換後還需保持實數的身份) 要求 $A_{-\beta}^* = A_{\beta}$ ，* 為共軛複數，(8) 式實際上為一組無限大的對角矩陣，擾動動能與旋能在 (α, β) 基的分量定義為：

$$E_{\alpha, \beta} = 1/2 (k^2 A_{\alpha, \beta} A_{\alpha, \beta}^*)$$

$$Z_{\alpha, \beta} = 1/2 (k^4 A_{\alpha, \beta} A_{\alpha, \beta}^*) \tag{9}$$

動能與旋能的譜密度從 $(\alpha = 0, N)$ ， $(\beta = -N, N)$ 的長方塊表示，N 是模式中網格解析長度的波數，因共軛條件，所以只需要二維波譜的右半邊即可。例如 sin 基本流的流線、風、旋能剖面分別見圖 1(a), (b), (c)，其動能、旋能的譜密度則為圖 1(d) 黑點處標明 $(0, 1)$ ， $(0, -1)$ 基的位置。

(8) 式指出，線性解中，不同 α 基的擾動將無能量交換，所以擾動只能沿 y 方向的能譜移動，同時，擾動各富氏基必須透過與基本流 $\sin y$ 的中介，方能交換能量，所以每個 timestep，只能在能譜上下移動一格。上式中阿諾守則可證明 (LinHo, 1985a) 擾動總動能 $E = \sum E$ 的改變量與總旋能 $Z = \sum Z$ 的改變量相等，即：

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} = \sum \alpha (\partial \beta + 1) I_m \langle A_{\beta+1}, A_{\beta} \rangle$$

(e) 不均衡平移

忽略(1)式中最後一項，定義擾動渦度 $\xi = (\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2) \psi$ ，Rayleigh 方程式變成追蹤劑 (tracer) 方程式：

$$(\partial / \partial t + U(y) \partial / \partial x) \xi = 0 \tag{10}$$

平行風切流經過伽利略座標轉換：

$$X = x - \int_0^t U dt, \tau = t$$

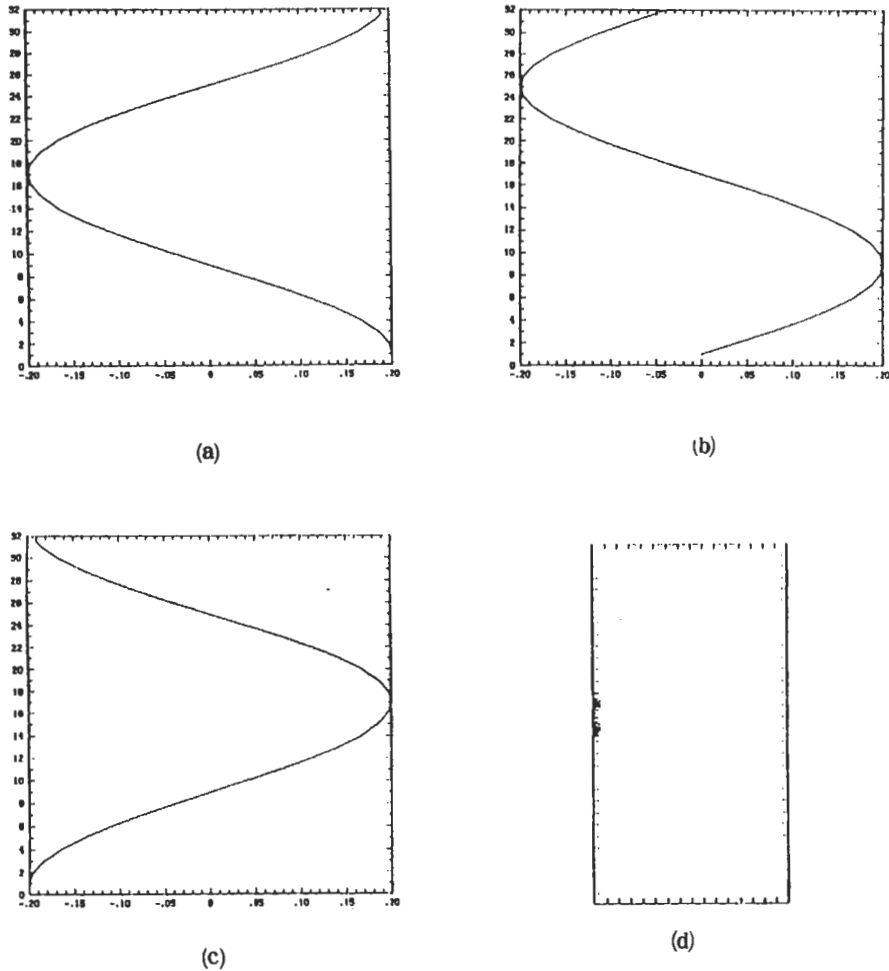


圖 1 初始基本場之流線 1(a)，風剖面 1(b)及旋度場 1(c)，此為 sin 噴射流，中央為轉折點，動能、旋能的譜密度 1(d)以黑點的濃淡代表，因為 reality condition，所以只需要二度空間波數軸的右半邊即可。

(10)式簡化成：

$$\partial \xi / \partial \tau = 0 \tag{11}$$

上式解答如下：

$$\begin{aligned} \xi(x, y, 0) &= F(x, y) \\ \xi(x, y, t) &= F(x - \int_0^t \bar{U} dt, y) \end{aligned} \tag{12}$$

從(10)式可以看出 ξ 沿基本流向守恆，若初始擾動的相位平行 y 軸，當 $t > 0$ 相位會逐漸趨向 U 剖面，所謂百葉窗效應 (Venetian-blind effect

)，由示意圖圖 2 顯示，擾動相位向噴流軸前傾，動量通量逆梯度進行，Starr (1968) 稱之 negative viscosity . 這種效應會持續下去，使擾動能量減弱，同時讓相鄰的槽、脊線逐漸貼近。封閉流線拉長成橢圓形，長軸漸漸水平。

以傳統方式在這裡重新定義擾動的動能(energy) E 與旋能 (enstrophy) Z 在適當的 x 軸距離長度 (0, L) 內為：

$$\begin{aligned} E &= \int_0^L \int_{y_1}^{y_2} (\nabla \phi)^2 dy dx \\ Z &= \int_0^L \int_{y_1}^{y_2} (\nabla^2 \phi)^2 dy dx \end{aligned}$$

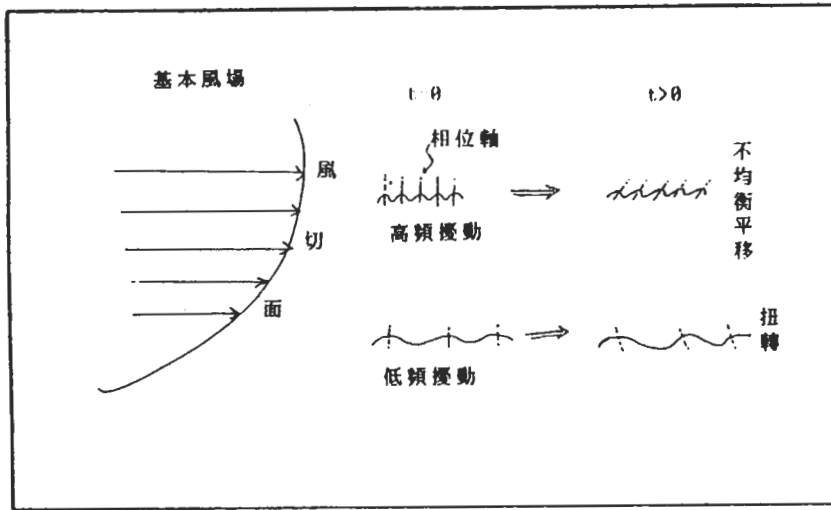


圖 2 風切流中擾動變形示意圖，當擾動尺度很小，旋度場的行為較流線場佔優勢，類似高頻濾波 (High-pass filter) 過程，此時擾動的演進在早期與被動追蹤劑一致，相位軸仆向風剖面，動、旋能受不均衡平移效應影響，逆梯度進行，擾動不但穩定而且逐漸消失。當擾動尺度增大，流線場如低頻濾波 (Low-pass filter) 相形重要，則扭轉效應加強，正壓不穩定情況下，擾動垂直風剖面而動，旋能處於不穩定狀態。

(8)式分別乘上 $\phi, \nabla^2 \phi$ ，對週期盒子積分，可得到 E, Z 的時間變化式：

$$\begin{aligned} dE/dt &= \int_0^{2\pi} \overline{\xi' v'} (d\bar{\phi}/dy) dy \\ dZ/dt &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

以上橫槓代表“—” = $1/L (\int_0^L dx)$ ，即對 X 方向之平均值，此外， $v' = \partial \phi / \partial x$ ， $u = -(\partial \phi / \partial y)$ ，(13)式說明擾動能量的變化，相當於渦度平流 (vorticity flux) 與基本場流線剖面的相關 (correlation)。(13)式同時可寫成熟悉的形式：

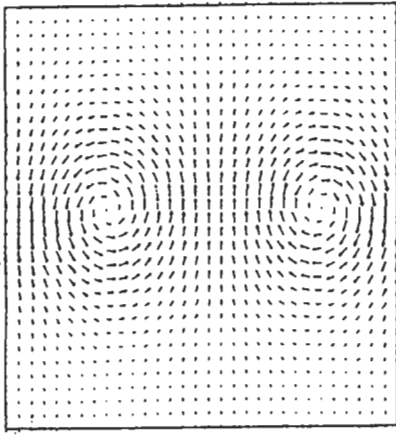
$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_0^{2\pi} \overline{u' v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy \\ &= - \int \bar{u} \frac{\partial \overline{u' v'}}{\partial y} dy \end{aligned} \quad (14)$$

動量通量 (momentum flux) 與基本場渦

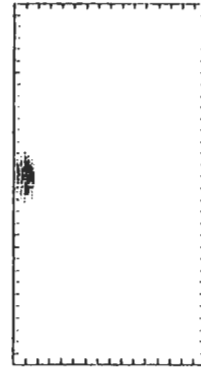
度的相關，通常由擾動黏滯係數 K (eddy viscosity coefficient) 之符號決定：

$$\overline{u' v'} = -K \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (15)$$

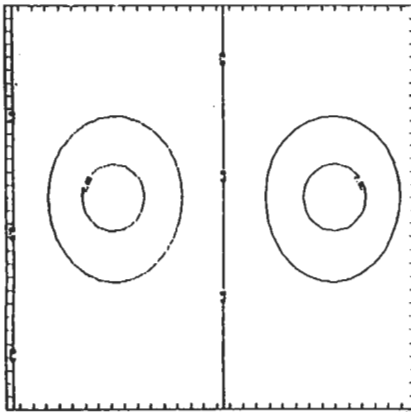
K 若為正時 $\overline{u' v'}$ 與 \bar{U} 為負相關，此時擾動從基本場取得能量逐漸增大。(當擾動與基本場尺度分離時，(1)式可經過 Direct Interaction Approximation 證明 K 為正值常數，見 Lin Ho, 1985b) 如果只考慮平流項，均向初始擾動發展時，K 為負值，擾動將能量反饋給基本場，圖 3 為數值模擬的結果， $t = 0$ 時放置均向氣旋及反氣旋擾動於基本場的轉折點上，初始擾動的風場，流線場，旋度場分別如 3(a), 3(b), 3(c)，對應的動能譜密度，旋能譜密度見 3(d), 3(e)，經過(10)式的積分後， $t = 10$ 時擾動漸漸拉成長條，傾向風切剖面 3(f)，動能與旋能向右上角發展：3(g)，擾動所產生的動量通量，旋量通量皆向逆梯度進行：3(h)，



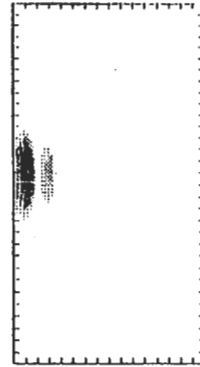
(a)



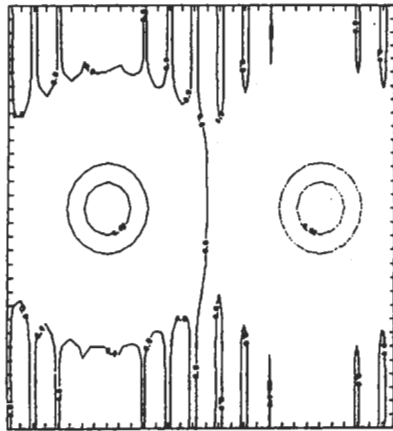
(d)



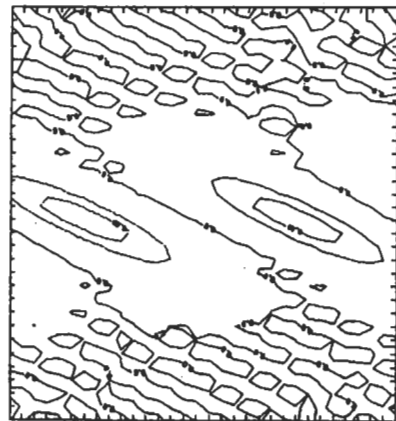
(b)



(e)



(c)



(f)

(下一頁繼續)

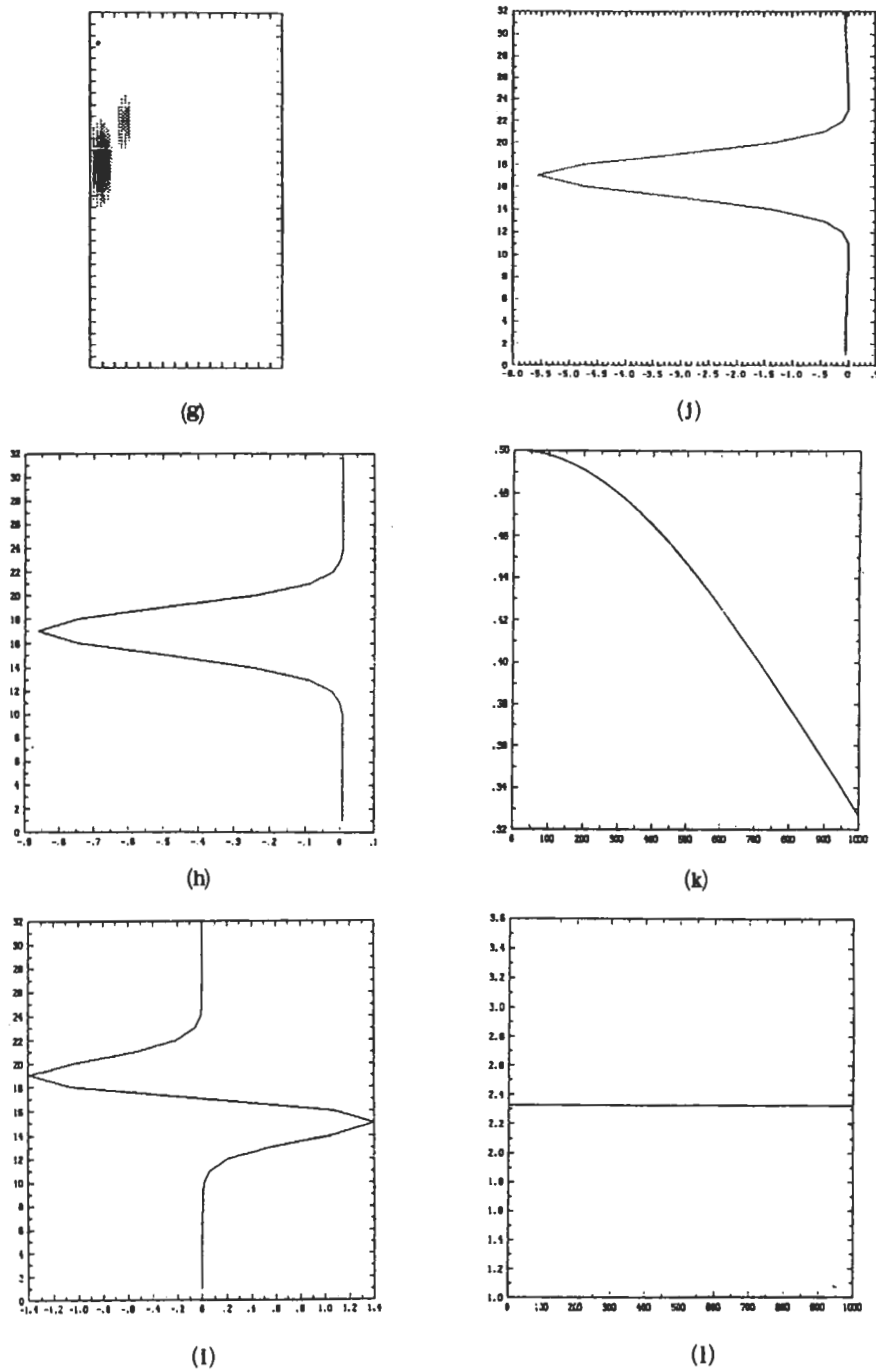


圖3 擾動在風切流中變形過程的數值模擬，當 $t=0$ 時，均向正圓擾動 $\psi(r) = \pm e^{-\frac{r^2}{100}}$ 放置於轉折點上，其流線3(a)，風場3(b)及旋度3(c)，能譜密度3(d)，旋譜密度3(e)經過不平衡平移後，在 $t=10$ 時的發展。3(f)上擾動旋度線沿西北-東南軸拉長，傾向風剖面，能譜3(g)往右上角移動，產生逆梯度進行的動量通量3(h)，旋量通量3(i)，以致於擾黏滯係數為負3(j)，擾動動能降低3(k)，旋能不受平移項影響3(l)。

3 (l), 擾動黏滯係數為負值: 3 (j), 所以擾動動能隨時間銳減: 3 (k), 但是旋能不受到影響: 3 (l)。

不均衡平移雖然有減弱擾動動能的效應, 但 E 不能無限制減少, 這裡的上限可以由變分法從 $Z = \text{常數}$ 的方程式求取 (林和, 1988), Z 與 E 透過 $\xi = \nabla^2 \phi$ 的關係互相聯結, 當 Z 固定, E 不斷減少時, 旋轉量的尺度會由大趨小, 即擾動的 vorticity 漸漸破碎細密, 空間中的間歇性因之加強。

(f) 扭轉

Rayleigh 方程式若只考慮渦度梯度的效應, (1)式可寫成:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \phi - \frac{\partial \phi}{\partial x} \bar{U}'' = 0 \tag{10}$$

不像純粹只有平流效應如(2)式, $U = \sin y$ 時, (10)式的解析解 (據作者所知) 尚未能解決, 雖然 Case (1960) 提供了初始值問題之系統化解法, 但一般而言, 均向初始場及(7)式中 Green 方程式的計算皆非易事, 我們將在下文 (林和, 1988) 嚐試 WKB 的漸近解 (asymptotic approximation)。

暫且犧牲數學的嚴密性, 讓我們在此將渦度梯度場效應用啟發式 (heuristic) 觀點說明: 當 ϕ 的尺度小於基本場變化時 (即 $\nabla^2 \sim -k^2$, $k \gg 1$), (10)式的漸近形式如下:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_N \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi = 0, U_N = -\frac{\bar{U}}{k^2} = \frac{\bar{U}''}{k^2}$$

U_N 代表重新尺度化 (rescaled) 的基本場, U_N 與 \bar{U} 比較, 不但減弱而且方向相反, (10)式中的“準”平流項作用於擾動流線場, 而流線場相當於渦度場經過低頻濾子 (Low-pass filter, 即 ∇^2) 通過的結果, 所以相拉只有在旋度稀落的地方, 才會垂直於噴流剖面, 見示意圖 2。

(10)式中擾動的動能、旋能變化, 採取(11)的推導

步驟得到如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial t} &= \int \frac{\overline{\xi'v'}}{\xi'v'} \frac{\partial \xi}{\partial y} \end{aligned} \tag{11}$$

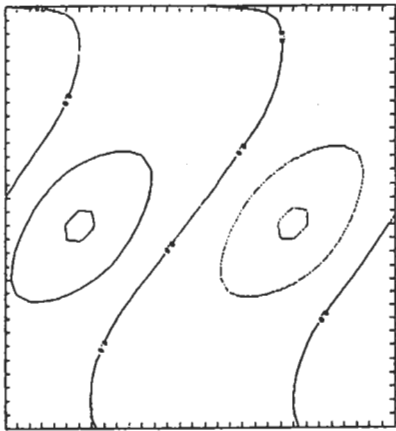
即渦度梯度項只能增加擾動的旋能, 不能增加擾動的動能。既然擾動的動能守恆, 旋能改變惟一的途徑, 惟有將旋能在擾動波譜上重新分配。Z 增加時, 旋能由大尺度傳遞向小尺度, Z 減少則反之。

但以上過程與(c)節不均衡平移進行的方向正好相反, 數值模擬的結果亦顯示平流項與梯度項的相互調適與對稱性, 圖 4 中為(10)式的積分, 初始擾動與上節圖(3)相同, $t = 10$ 時, 梯度項使其相位軸從平行 y 方向趨向垂直 U 剖面: 4 (a), 這是正壓不穩定最基本的機制。旋能譜密度: 4 (b)皆向下方移動, 但移動幅度很小, 顯示平均尺度減小, 動量、渦度通量皆為順梯度 (down-gradient) 方向: 4 (c), 4 (d), 擾動黏滯係數為正值: 4 (e), 所以, 噴射流提供擾動旋能, 不穩定度將可產生, 擾動的動能保持不變: 4 (f), 但是旋能隨時間增加: 4 (g)。

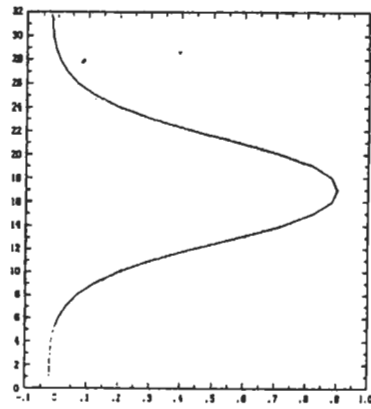
(g) 均向破壞

對 $\sin y$ 噴流而言, 同時包括平流流及扭轉效應, 均向擾動的增強、減弱或變形, 須由區域內的旋度大小, 流線形狀決定。當兩項合併時, E 與 Z 不能夠獨立發展, 如果 E 與 Z 同時增大, 平流項與渦度梯度項在波譜的遞送 (Cascade) 方向互相衝突, 惟有達到一平衡狀態, 即 E, Z 合乎 Arnold 判據的波譜分佈 (LinHo, 1985a) 扭轉與不均衡平流項才能抵消。

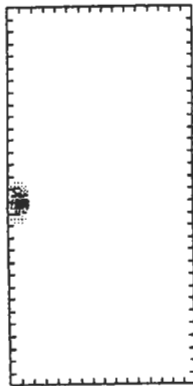
我們將前節的初始場按照 Rayleigh 方程式積分, 可以看出, 當 $t = 10$ 時, 擾動中心偏向風切剖面, 這裡因為渦度密集, 而擾動的旋度場受不均衡平流作用巨大, 擾動能量回饋到基本場。圖 5 (a)(b) 顯示, 靠近均向擾動中心, 以不均衡平移的破壞均



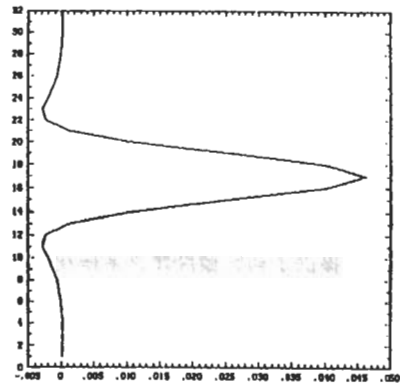
(a)



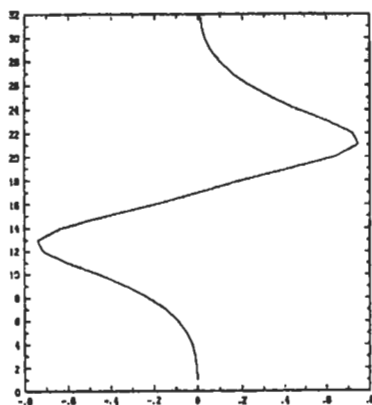
(d)



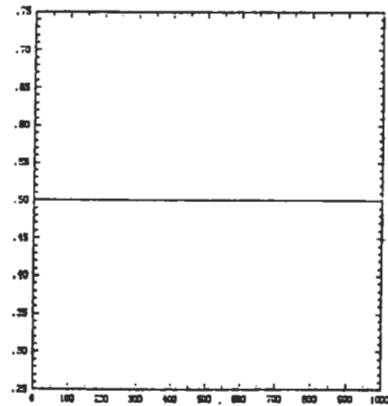
(b)



(e)



(c)



(f)

(下一頁繼續)

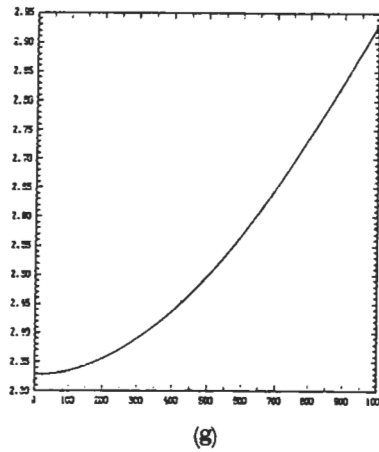


圖 4 初始條件如圖 3，但只包括基本場渦度梯度效應，在 $t=10$ 時，扭轉項將擾動扭向垂直風剖面 4 (a)，能譜小幅度下移 4 (b)，而動量渦度 4 (c)，渦度梯度 4 (d) 皆為順梯度進行，4 (e) 中黏滯係數為正，雖然擾動動能守恆 4 (f)，但是旋能隨時間增加 4 (g)。

向效應為主，但在外圍，擾動渦度漸漸稀薄，尺度增大，這時候擾動流線場受扭轉的影響較大，而相位軸反轉，開始垂直於風剖面，與中心軸正好反向而行，旋能譜反映平流的效應，動態譜則為扭轉效應凌駕：圖 5 (c)(d)，兩種勢力的消長在區域的分配由動量通量以及旋能通量的分佈決定，見圖 5 (e)(f)，由於初始場大部分擾動在外圍地區，所以擾動的動能與旋能隨時間不斷增加，sin 噴射流對這特定均向初始場應為不穩定。

三、隨機均向場的演化

以上敘述的初始擾動皆以空間中正圓流線的幾何性質界定均向性，但如果以隨機觀點分析更具推廣意義。假設隨機性由高斯分佈中任意揀取的相位引進， $\langle \rangle$ 代表套集合，足夠多的樣本會滿足統計上的均向條件，統計均向性在此定義如下：

$$\langle A_\beta, A_{\beta'}^* \rangle = \delta_{\beta\beta'} \cdot A_\beta \quad (18)$$

$\delta_{\beta\beta'}$ 為 kronecker delta, $\delta_{\beta\beta'} = 0$ 當 $\beta \neq \beta'$, $\delta_{\beta\beta'} = 1$ 當 $\beta = \beta'$ 。倘若 $t = 0$ 時套

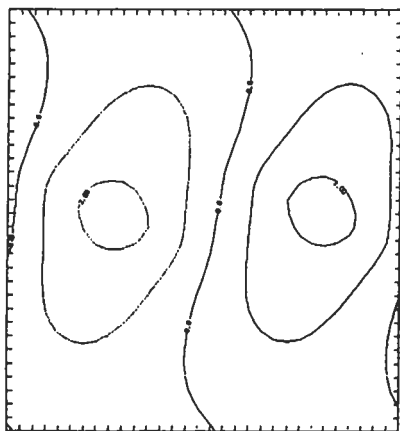
集合為均向，則：

$$\dot{E} = \dot{Z} = 0 \quad (19)$$

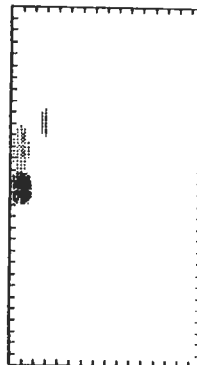
穩定度必須考慮更高次微分：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \\ &= \Sigma 8 \alpha^2 \beta^2 \frac{(k^2 - 1)}{k^2(\beta + 1) \cdot k^2(\beta) k^2(\beta - 1)} \\ E_\beta &\geq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

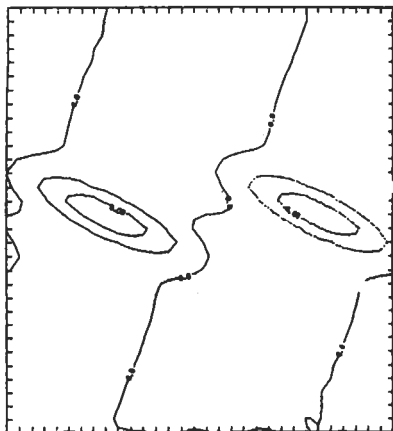
(20) 式帶來重要結果：在任意初始分佈下，即擾動具備均向性時擾動的動能，旋能為最小值。換句話說，擾動處於統計不穩定狀態。E 雖然不能呈指數成長，但 E 必須增加，如果在 sin 噴射流中，放置任意初始擾動，旋譜相同且為統計均向，但相位為隨機揀取，其擾動能量增加減少或上下起伏的各類情形都有，見圖 6 (a)，但是套集合 (圖 6 (b)) 則將沿 t^2 曲線逐漸滋長。加入非線性項或將渦度場改為追蹤劑，結果亦不相同。因不在本文討論範圍之內，我們只將結果陳示於圖 6 (c) - 6 (k)，詳情請見圖說。



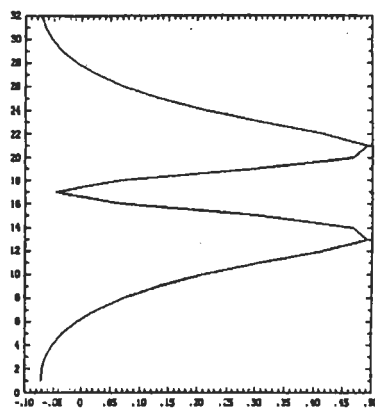
(a)



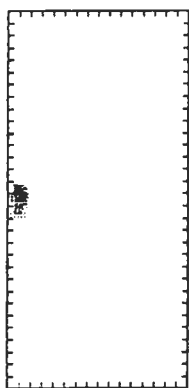
(d)



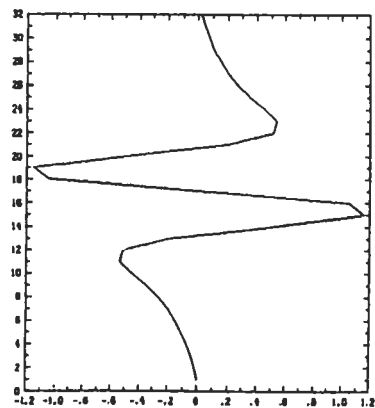
(b)



(e)



(c)



(f)

(下一頁繼續)

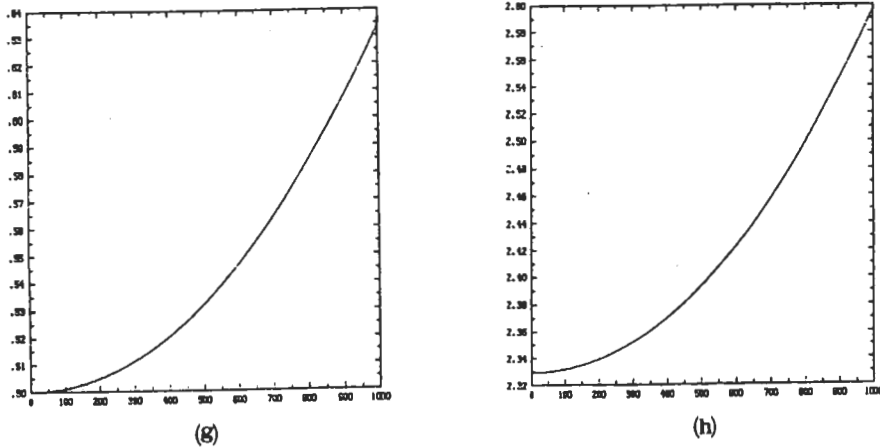


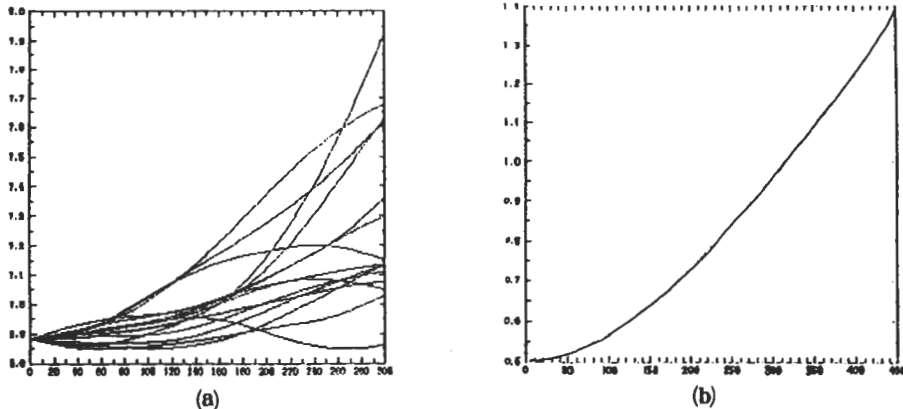
圖 5 同時包括不均衡平移與扭轉效應時之擾動均向破壞過程，5 (a)，5 (b)為擾動流線、旋度場，可見在中央流線密集 (High-pass) 區，平移影響最大，所以擾動能量流失，但在外圍流線稀疏 (Low-pass) 區，扭轉項將擾動排列成與風剖面正交形狀，擾動旋能從基本場汲取能量，5 (c)，5 (d)則分別顯示相關效應在能、旋譜的作用。動、旋能通量 5 (e)，5 (f)依照各區域的近地 (local) 結構而呈現段落性齒形曲線。

四、結論

區域集中擾動 (localized perturbation) 在風切流中的瞬變 (transient) 運動不能從古典理論解釋，卻常常展現在日常天氣、海洋現象中，由 Rayleigh 方程式顯示，基本場的作為不均衡平移與扭轉兩項，近來初始問題的研究集中在 Couette flow (Boyd 1983, Tung 1983)，以致於扭轉機制受到忽視，本文使用 sin 噴射流說明這兩種機制破壞均向性的過程，它們對相位軸

扭曲的方向互相垂直且受到 Arnold 保守量 (LinHo, 1985a) 的限制，我們可以從動能、旋能量的觀點分析這兩種機制如何重新分配擾動的波譜形狀。如果均向性由隨機初始場定義，則我們發現均向初始場擁有最低階的能、旋量，如此可輕易證明均向場在 sin 風切流中處於不穩定狀態。

初始值問題的解析解，因為要考慮到連續性波譜，很難推廣到更實際更複雜的剖面。目前對下游的發展，WKB 近似解提供有用的訊息，但風切流的結構也因此受限 (尺度分離的假設！)。目前我



(下一頁繼續)

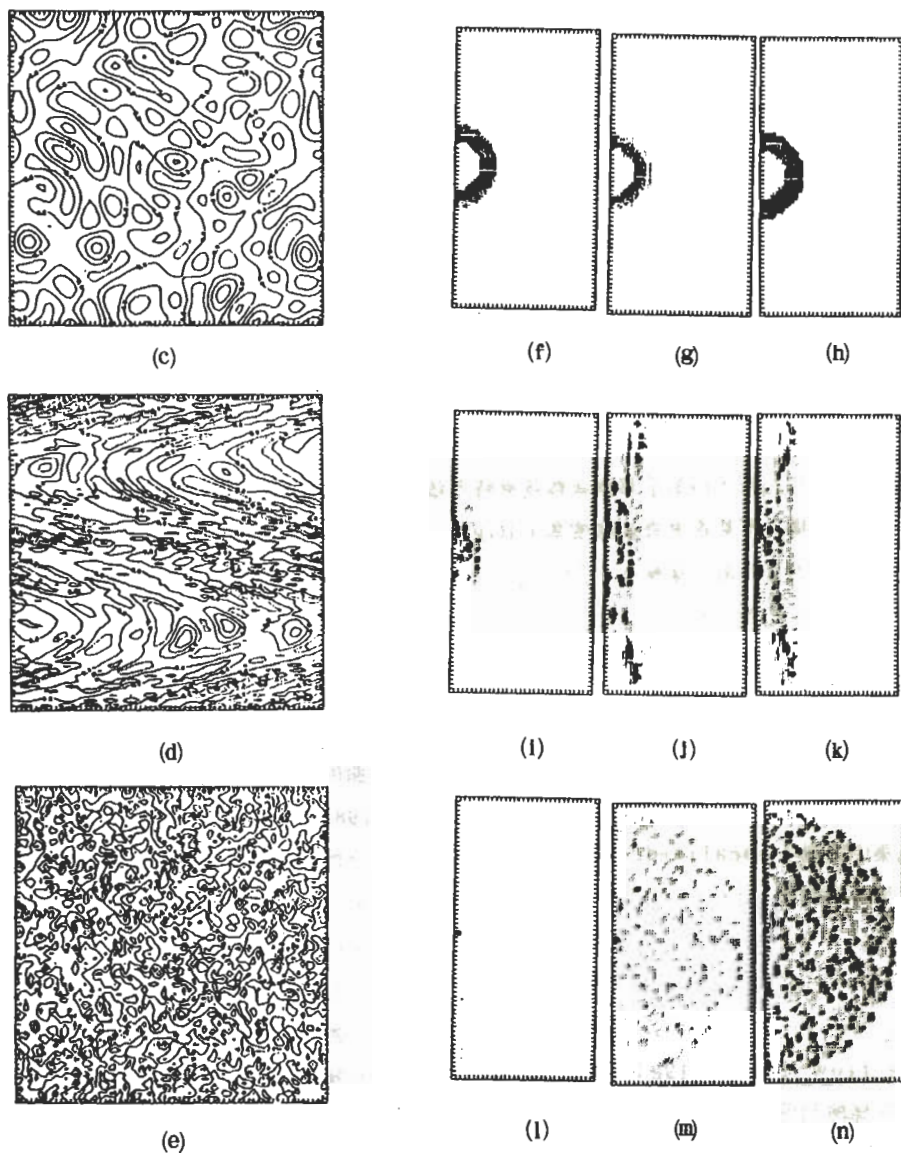


圖 6 隨機初始場的演化，15次擾動中 6(a)，能量增減，各自發展，似無規律可循，但經過套集合，6(b)則呈 t^2 成長。6(c)，6(d)為其中一次取樣在 $t=0$ ， $t=20$ 時波度場形狀，6(e)將包括非線性項 (Jacobian term)。6(c) - 6(e)的右側則為擾動的波能，動能及追蹤劑波譜 6(f) - 6(h)。從 6(i) - 6(k)可以看出渦度場與追蹤劑統計類似，雖然是線性問題，但能、波譜呈現紊流特性。當非線性項亦包括在內的時候，譜上波長可以沿 X 軸移動，很快彌漫在可容許的解析度半圓內，達到阿諾狀態 (LinHo, 1985 a)。

們似乎還沒有一套有效的數值方法或解析方法判定
運算子波譜的完整集合 (Mack 1976, Grosch

and Salwen 1978) 從這點我們還需要更多的
的初始值模擬與分析，尤其對於幾何或統計均向初

始場進行觀察的工作饒富意義。

\sin 噴射流本身即值得更多的注意力，在週期性邊界條件下，擾動呈指數穩定但不一定能量或旋量守恆。不同的初始場會呈現順時鐘、逆時鐘，拉長、縮短的多姿變形，經過有系統的整理，這方面研究有助於我們了解尺度間交互作用最基本的機制。

誌謝

本研究在國科會專題研究計劃NSC 75-0202-M002-11支持下完成，特此致謝。

參考文獻

- 林 和、曹志成，1988：強烈非平行流的絕對不穩定度與平流不穩定度。大氣科學，16，2，117-136。
- 林 和 1988：羅士培波包在風切流的初期發展。（準備中）
- Benny D.J. and R.F. Bergeron, 1969: A new class of nonlinear waves in parallel flows. *Stud. Appl. Math.* 48, 181-204.
- Boyd J.P., 1983: The continuous spectrum of linear Couette flow with the beta effect. *J. Atmos. Sci.*, 40, 2304-2308.
- Case K.M., 1960: Stability of inviscid plane Couette flow. *Phys. Fluids*, 3, 14.
- Drazin P.G. and W.H. Reid, 1981: Hydrodynamic stability. Cambridge University Press.
- Farrell B.F., 1982: The initial growth of disturbances in a baroclinic flow. *J. Atmos. Sci.*, 39, 8, 1663-1686.
- Grosch C.E. and H. Salwen, 1978: The continuous spectrum and the Orr-Sommerfeld equation. part I., The spectrum and the eigenfunctions. *J. Fluid Mech.* 87, 33-54.
- Howard, L.N. 1961: Note on a paper of John W. Miles. *J. Fluid Mech.* 10, 509-512.
- Illari L., Malguzi P. and A. Speranza, 1981: On breakdown of the westerlines. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 17, 27-49.
- Lin C.C., 1955: The theory of hydrodynamic stability. Cambridge University press.
- Lin Ho., 1985a: The geometric and statistical properties of Arnold's invariant in shear flow. *P. Meteor. Res.*, 8, 1, 23-33.
- 1985b: Symmetrization of weakly asymmetric turbulence: A derivation of Eulerian eddy diffusivity. *P. Meteor. Res.*, 8, 2, 95-108.
- Lindzen R.S., B. Farrell and A.J. Rosenthal, 1983: Absolute barotropic instability and monsoon depressions. *J. Atmos. Sci.*, 40, 1178-1184.
- Lorenz E.N. 1967: The nature and theory of the general circulation of the atmosphere. World Meteorological Organization, Geneva, Switzerland.
- McIntyre M.E. and T.G. Shepherd, 1987: An exact local conservation theorem for finite-amplitude disturbances to non-parallel shear flows, with remarks on Hamiltonian structure and on Arnold's stability theorems. *J. Fluid Mech.*, 181, 527-565.
- Mack L.M. 1976: A numerical study of the temporal eigenvalue spectrum of the Blasius boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 73, 3, 497-520.
- Merkin, L., 1977: Convective and absolute instability of baroclinic eddies. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 9, 129-157.
- Peng M.S. and R.T. Williams, 1986: Spatial instability of the barotropic jet with slow streamwise variation. *J. Atmos. Sci.*, 43, 2430-2442.
- Pierrehumbert R.T., 1984: Local and global baroclinic instability of zonally varying flow. *J. Atmos. Sci.*, 41, 14, 2141-2162.
- , 1986: Spatially amplifying modes of the Charney baroclinic-instability problem. *J. Fluid Mech.* 170, 293-317.
- Rayleigh L., 1880: On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proc. London Math. Soc.* 11, 57-70.
- Starr V.P., 1968: Physics of negative viscosity phenomena. McGraw-Hill.
- Squire H.B. 1933: On the stability of three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls. *Proc. Roy. Soc. A*, 143, 621-628.
- Tollmien W., 1935: General instability criterion of laminar velocity distributions. *Math. Phys. Kl. I*, 79-114.

THE DESTRUCTION OF ISOTROPY AND THE INITIAL-VALUE PROBLEM
OF PARALLEL SHEAR FLOW

LinHo

Department of Atmospheric Sciences
National Taiwan University

(manuscript received January 7, 1988; in final form June 10, 1988)

ABSTRACT

The classical eigen analysis of parallel shear flow cannot solve the problem of transient evolution of a localized perturbation. Yet the basic mechanism of Rayleigh equation consists only two simple effects; the inhomogeneous advection and the bending. The isotropy would be destructed by these two effects but the phase lines can be tilted either along or orthogonal to the wind profile. Since the inhomogeneous advection and bending are connected through the Arnold constraint, it is expected that not only a full description of the development of anisotropy has to include both, but also some light can be shed while the evolution being interpreted in terms of the cascade process of eddy energy and enstrophy spectrum.

In this study a sine jet with periodic boundary condition was chosen as the basic state. The flow itself is exponentially stable but not necessarily conserving perturbation energy. The deformation of an isotropic vortex was scrutinized by the analytic and numerical methods. We found that inhomogeneous advection, acting on the perturbed vorticity field like on the passive tracer, would tilt the phase lines along the wind shear and henceforth, lead to the up-gradient transport of momentum flux. On the other hand the bending of mean vorticity gradient made the phase lines became perpendicular to the sine profile, a down-gradient transport of vorticity flux proved to be the source of instability.

We also showed that the statistically isotropic initial state had the minimum level of energy and enstrophy. Naturally the perturbation energy would start to increase. The further study will focus on the asymptotic behavior of WKB solution.

Keywords: Isotropy, Initial-value problem, Parallel shear flow, Continuous spectrum.