

# 鋒面可預測度的理論上限

林 和

國立台灣大學大氣科學研究所

(中華民國七十七年一月五日收稿；二月二十三日定稿)

## 摘 要

鋒面系統上密集的溫度梯度與渦度顯示各種尺度運動間非線性能量交換，鋒上等柄面逐漸陡峭，破壞溫度風平衡，製造 Solenoidal 環流、渦管拉長，使二度空間性的限制得以寬鬆。Semi-geostrophic 理論預測-8/3 斜率的能譜。這結果我們解釋成鋒面系統屬於 2.25D 的紊流，使用 Kolmogorov 慣性區段假設，Semi-geostrophic 流體的可預測度將可計算得知。倘若兩千公里長的鋒面生成能在四天前成功預測，豪雨發生在理論上即可具有兩天的可預測度，我們同時發現 2.25D 紊流的特性由 Composite Cascade rate  $\theta = (\epsilon^{1/3} \cdot \eta^{2/3})$  決定，其中  $\epsilon$  為 energy cascade rate， $\eta$  為 enstrophy cascade rate。

關鍵詞：鋒面、可預測度、次元、近地轉系統、慣性區段。

## 一、前言

熱帶以外地區，鋒面的動向，佔據預報人員大量的注意力。以台灣地區為例，除夏季颱風外，豪雨多半與鋒面系統有關，在梅雨季尤其顯著 (Chen, 1977)。然而，縱使設置了密集觀測網，聚集了嫺熟的預報員，或甚至使用超級大電腦，區域性模式，我們是否能正確無誤的預報鋒面的演化？不無疑問。這裡牽扯到可預測度 (predictability) 的問題。Lorenz 最早在 1963 年 (Lorenz, 1963) 指出，非線性，非週期性動力系統對初始值極端敏感，觀察時細微的誤差，會呈指數型擴大，以致於其後的發展分道揚鑣，完全失去可預測性。這理論經過 Lorenz、Leith……等人闡揚，加上模式校驗，已經奠定了深厚的基礎 (見 Thompson, 1983)，我們相信，梅雨鋒或一般鋒面的預報問題亦同。

從觀察上已知 (見 Palmen and Newton,

1969)，鋒面綜合多種尺度的運動，透過非線性項，快速交換能量，而鋒面本身的結構，剖面上呈現強烈的非地轉性質，垂直運動旺盛，傾向三維的紊流現象，屬於中尺度氣象的範圍。另一方面，沿鋒方向，密集的渦度、溫度梯度，代表 vortex-filaments 的纏緊 (folding, 見 Rhines, 1979)，正是二維紊流的特質。所以鋒面的尺度，恰好落在 2D 與 3D 紊流 (大尺度，中尺度) 間之過渡地帶。

非線性作用強烈的流體我們在此泛稱之紊流。三維紊流特徵是渦管拉長 (vortex stretch)，渦管拉長會觸發一連串各尺度運動的不穩定性，而使 enstrophy 猛爆增加，結果使可預測度變成短促。如果假設渦管拉長與  $\text{Div } \vec{u}$  成正比，則  $d\omega / dt \propto \omega D$ ，( $\omega$  代表渦旋度  $\nabla \times \vec{u}$ ， $D = \text{Div } \vec{u}$ )，通常非地轉流， $|D| \sim |\omega|$ ，

(例如  $|\frac{\partial u}{\partial x}| \sim |\frac{\partial u}{\partial y}|$  但對 Navier-Stokes

equation 而言,  $D$  與  $\omega$  的連繫透過 Laplacian 完成, 必需要考慮到非當地 (non-local) 速度的影響), 則  $d|\omega|/dt = |\omega|^2$ , 所以  $\omega$  會趨向自我放大 (self-amplification), 即鋒生 (Frontogenesis)。二維紊流雖然將渦條纏緊, 但主要的過程純係渦度平流 (vorticity advection) 作用, 渦管不能伸展。enstrophy 在缺乏外力下守恆, 運動過程溫和, 可預測度在綜觀尺度長達一週以上。

大尺度大氣運動常常被認為是二度空間運動, 根據觀察, 水平運動確實要較垂直運動大上幾個次方, 這種說法似乎成立。但仔細考察, 水平運動在垂直方向的變化很大, 若將渦度  $\zeta$  分成三個向量 ( $\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z + f$ ),  $f$  代表地球自轉的渦度, 則  $\zeta_x, \zeta_y$  量度垂直風切。對流層上層風速常常在 70-120 knots 左右,  $\zeta_x, \zeta_y \sim (50 \text{ ms}^{-1} / 10 \text{ km}) = 5 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ , 遠比  $\zeta_z + f = (1 + R_0) f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  為大 (假設羅士培數  $R_0 \sim 0.1$ )。所以  $\zeta$  與  $\Omega$  並不會平行。事實上,  $\zeta$  具有開展三度空間、拉長渦管的潛力, 大氣運動被侷限在二維的主要原因, 係受到熱力風 (thermal wind) 的限制。從渦度方程式可以看出, (e.g., Pedlosky, 1979, Equation 2.6.4, Page. 43) 垂直風切因渦管拉長所產生的渦度, 恰好與斜壓 Solenoidal 項 ( $\nabla \rho \times \nabla P / \rho^2$ ) 產生的渦度方向相反而抵消。這種由靜力、地轉效應相加的平衡力量, 主宰整個動力過程。

Solenoidal 項的強弱, 大約與等熵面的斜度成正比, 上述  $5 \times 10^{-3} (\text{s}^{-1})$  的垂直風切, 大約與  $1/1000$  的等熵面斜度相平衡, 當沿鋒等熵面傾斜到  $1/300$  或  $1/50$  時, 熱力風關係受到破壞, 水平方面的次環流 ( $\frac{\partial}{\partial t} \zeta_x, \frac{\partial}{\partial t} \zeta_y$ ) 將會產生。這時候大氣運動由二維運動漸漸傾向三維運動。

然而, 鋒面次元的增加仍有限度, Solenoidal circulation 增強, 只是減少了對三度空間運

動更嚴格的限制。渦管雖然會相對伸展, 以補償熱力風受到之破壞, 但渦管並不能無節制伸展。其原因有二: 第一項原因是對流層的高度與水平長度相差懸殊, 所以渦管只能沿噴射氣流垂直風切面斜向拉長。第二項原因則考慮到質量場。在旋轉流力中, 各氣象變數若視為各國“貨幣”, 皆以“金”為貨幣基準, 這裡的“金”本位, 即是 Ertel 的 potential vorticity ( $PV = \zeta \times \nabla \theta / \rho$ )。PV 雖然是無向量, 我們仍可分成  $\{ (f + \zeta_z) \cdot (\frac{\partial \theta}{\partial z}) \} / \rho$ ,  $\{ \zeta_H \cdot \nabla_H \theta \} / \rho$  兩項, 分別代表垂直、水平渦度的貢獻。這兩項的比例, 實際和等熵面的斜度為正比。所以  $|\zeta_H|$  可以在 100 f 左右, 但在“兌換”PV 時, 等熵面斜度若為  $|\nabla \theta| / (\frac{\partial \theta}{\partial z}) \sim 0.001$ ,  $\zeta_H \cdot \nabla \theta / \rho$  將僅值  $(f \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z}) / \rho$  的十分之一。所以鋒面發展仍然偏向二維。Williams (1967) 即曾經使用 quasi-geostrophic 理論, 說明一部分鋒生現象。

事實上, 鋒在整個大氣能譜上扮演關鍵性的角色, 大尺度, 天氣尺度的運動偏向二維, 而二維運動中平均波數  $\overline{K^2} = \text{enstrophy} / \text{energy}$  為守恆量, 所以能量向小尺度的輸送非常緩慢, 需要靠鋒生過程轉換成三維運動以加速能量 Cascade 過程。

本文將嘗試綜合動力與紊流的觀點, 分析鋒系統的能譜特性, 根據擾動生存期 (Turnover time) 估計各尺度運動的可預測度, 我們將在第二節說明可預測度與慣性區段的關係, 經由 Semi-geostrophic theory, 討論鋒系統的能譜, 第三節確定鋒系統為 2.25 維紊流, 推廣 Kolmogorov 的理論, 聯結到可預測度的估計上。第四節檢討本文結果對預報、能量輸遞鏈可能的影響。

## 二、尺度分析及預測時間

### (a) 擾動生命期

Robinson (1967) 認為大氣運動的可預測度, 受限於空氣質點保持其物理單元的時間, 相當於能量從測風儀可量度的 noble energy, 經摩擦

轉化成只能從溫度計量度的 thermal energy ，其過程所需之時間，公式顯示，

$$(du/dt) + \dots = \nu \cdot \nabla^2 u$$

上式中  $\nu$  為 molecular viscosity 所以追際氣塊，直達其消失的時間 ( $L/U$ ) 不可能超過 self-diffusion 的時間。但是在實際大氣中，遠在分子間摩擦力能發揮效應之前，能量已經 Cascade 到不可辨認的微小尺度，這作用我們習慣用參數化的形式表示：

$$(d\bar{u}/dt) + \dots = \mu \cdot \nabla^2 \bar{u}$$

這裡  $\mu$  是 eddy viscosity，而“-”代表網格 (resolved scale) 的解析下限。 $\mu \cdot \nabla^2 u$  是 flux divergence ( $\nabla \cdot \overline{u'v'}$ ) 參數化的結果。我們可以將“-”，即網格的解析度一層一層詳細區分，採取尺度的觀念，(一般大氣動力學的尺度定義成  $(-\lambda^2)^{1/2}$ ， $\lambda$  是 Laplacian operator  $\nabla^2$  的 eigen value  $\nabla^2 = -\lambda^2$ )，如此則對尺度  $k$  的 mode 而言，其可預測度的時間為：

$$\tau_k < 1 / \mu k^2$$

但是  $\mu$  需要從經驗式或 turbulence closure 來決定。

(b) 慣性區段 Inertial range

K 雖然難從原始方程式導出，但 Kolmogorov (1941) 利用慣性區段的理論，卻很容易估計出  $\tau_k$  的大小。慣性區段最初適用在三維紊流上，Kolmogorov 推測，在大尺度的 forcing scale 與微小尺度的 molecular dissipative scale 中間，有一段很長的波譜，完全靠非線性項 (nonlinear, inertial term) 推動，既然能量的來源、出口皆已固定，能量從大尺度到微小尺度一階一階的循序進行，則能量傳降率 energy cascade rate  $\epsilon$  [ $L^2 T^{-3}$ ] ( $L$  中為單位) 應該為常數，獨立於各尺度 ( $k$ ) 之外的數值，(這好像河水順流而下，每一處河川剖面的總流量都須要相等，否則不能維持 local equilibrium，必然在

某些地點造成泛濫或乾涸)。根據上述，慣性區段的特性將由  $\epsilon$  與  $K$  決定，從這裡導出大名鼎鼎的能譜  $E(k)$  [ $L^3 T^{-2}$ ]：

$$E(k) = \alpha \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

$\alpha$  為 Kolmogorov constant 估計約 1.5。

以上理論，經過 Kraichnan, Leith, Batchelor 等人經營，很快的推廣到二度空間的地轉棄流上，在二度空間的慣性區段，能量幾近守恆，運動的特性由渦度傳降率 enstrophy cascade rate  $\eta$  [ $T^{-3}$ ] 決定，所以：

$$E(k) = \beta \eta^{2/3} k^{-3}$$

$\beta$  如同  $\alpha$ ，亦為接近 1 的常數。

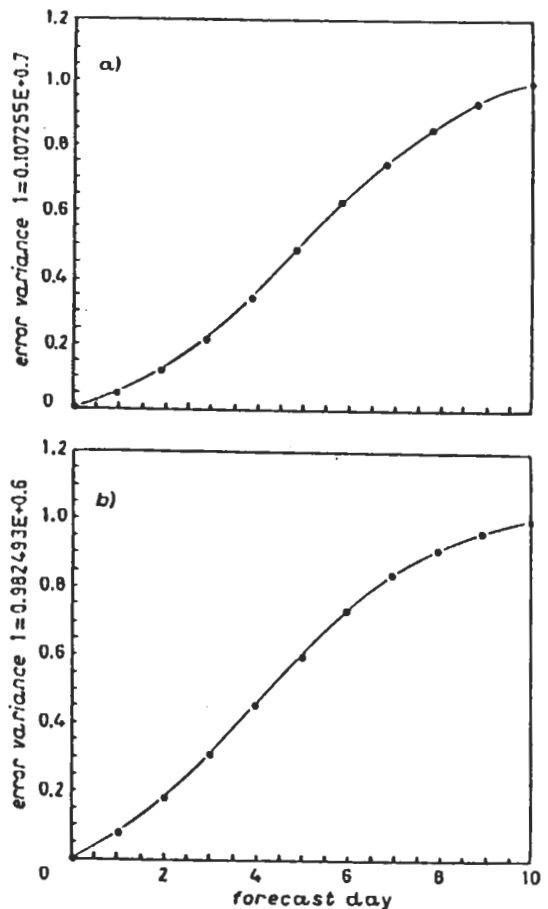


圖 1：全球 500 mb 高度場由 ECMWF 模式預測誤差差方。(a)圖為 1981 年冬季 100 天。(b)圖為 1981 年夏季 100 天。

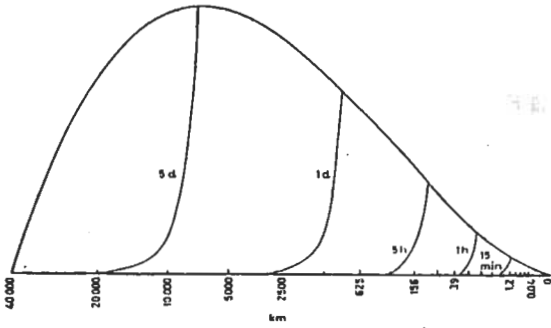


圖 2：從 closure 模式計算出可預測度流失的速率，半圓曲線代表動能能譜，短拋物線代表誤差由小尺度傳染到曲線左側能譜所需的時間，此圖取自 Lorenz (1969)。

從各變數的物理單位分析，可預測的時間  $\tau_K$  在 3-D 時為：

$$\tau_K = \epsilon^{-1/3} k^{2/3}$$

而在 2-D 時

$$\tau_K = \eta^{-1/3}$$

所以在 2-D 的慣性區段， $\tau_K$  獨立於尺度  $k$ ，Lorenz (1969) 估計初始值的觀察精確度增加兩倍，則大氣可預測度約增加 1 天左右，但對現行的全球觀測網，其誤差值在地表氣壓約為  $\pm 0.1$  mb，溫度  $\pm 1^\circ\text{C}$ ，風速  $\pm 1$  m/s，高空探測則溫度  $\pm 1^\circ\text{C}$ ，風速  $\pm 1$  m/s (Bengtsson, 1975)，均已達到儀器上限，一般模式對綜觀尺度的預報能力在 3 天到 1 週之間 (見圖一，Kalnay and Livezey 1985)。

此外， $\tau_K$  估計的是 error 從  $2k$  區段到  $k$  區段傳遞的時間，Lorenz (1969) 將誤差分佈到整個短波區而由  $-5/3$  定律算出：

$$T_K = |\epsilon|^{-1/3} K^{-2/3} (1^{-2/3} + 2^{-2/3} + 4^{-2/3} + \dots) = 2.8 \tau_K$$

Lorenz 計算的結果由圖 2 顯示， $-5/3$  定律相關的預報度流失速率。Leith 與 Kraichnan (1973) 使用更精細的 turbulence closure mo-

del 得出下式：

$$T_K = 10 \tau_K \quad (3D)$$

$$T_K = 2.5 \tau_K \quad (2D)$$

(c) 中尺度的可預報度

上述研究，針對 2-D、3-D 的地轉紊流，分別處理，但觀察到的天氣能譜，是否符合  $-3$  或  $-5/3$  定律呢？尤其在中尺度範圍內，Lilly 與 Petersen (1983) 綜合數項結果，繪出圖 3，大致顯示，比 2000、3000 公里長的大氣運動，接近 2-D 特性，所以能譜按  $-3$  斜率衰減，從 2000 公里到數十公里，則類似 3-D 運動，斜率傾向  $-5/3$ ，圖 3 值得注意之處，靠近 1000 到 200 公里間的區域，亦即鋒面系統及伴隨的中尺度  $-\alpha, \beta$  的運動，正好落在  $-3$  與  $-3/5$  斜率中間，鋒面可以想像成 2、3 次元間過渡的動力系統，證諸中緯度的鋒面結構 (Palmen and Newton, 1969) 或梅雨鋒結構 (Chen and Chang, 1980) 相當符合實情。Lilly (1983) 認為在中尺度的可預測時間，

$$\tau_K \sim 6 / (k^{-3} E(k))^{1/2}$$

下表列出各尺度的速度  $(KE(k))^{1/2}$  與  $\tau_K$ 。

| 擾動速度與可預測時間 |                     |                         |
|------------|---------------------|-------------------------|
| 波長(km)     | $(kE(k))^{1/2}$ m/s | $6/(k^3 E(k))^{1/2}$ hr |
| 1000       | 4                   | 72                      |
| 500        | 3                   | 48                      |
| 200        | 1.7                 | 34                      |
| 100        | 1.3                 | 24                      |
| 50         | 1.0                 | 14                      |
| 20         | 0.7                 | 8                       |
| 10         | 0.5                 | 6                       |

(d) 間歇性 Intermittency ; (壞消息?)

應用 Kolmogorov 的紊流理論到地球大氣的動力學，“紊流”的定義已經超過傳統的概念，我們在這裡處理的對象包括屬於行星尺度、綜觀尺度、中尺度以迄于微氣象各種譜段的運動。而以統計

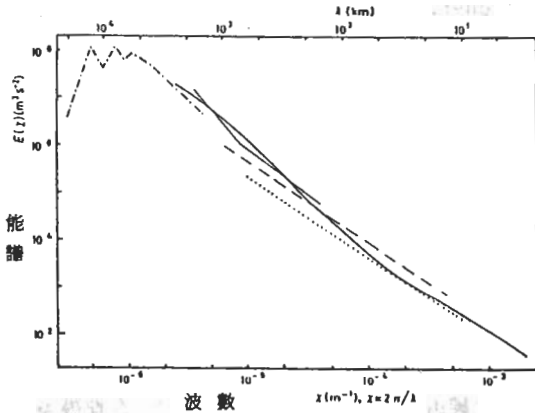


圖3：不同資料來源所求得的能譜，包括從大尺度到中尺度的運動。此圖取自 Lilly 與 Petersen (1983)。

力學，非線性動力系統的觀點 (point of view) 來敘述整個現象，這樣的方法能否成立呢？

如果大氣運動在時間、空間具備統計的均勻性，Kolmogorov 的理論適用性大致無差，氣象變數的分佈，應該接近高斯分佈，根據觀察 (White, 1980)，證實在標準大氣中，氣壓、溫度、濕度等在特定地點及季節很接近高斯曲線。但是，顯示中尺度特性的雨量值，卻接近 log-normal distribution (Lovejoy and Mandelbrot, 1985) 意味對流豪雨現象時空間中間歇性強烈，可預測度將極度微弱。

雖然對間歇性現象，Kolmogorov (1962) 局部修改了慣性區段的理論，但目前除非碎度 (fractal) 理論有重大突破，對非高斯分佈的流力現象，可預測度仍無跡可尋。

(e) 不可毀滅的鋒 (好消息?)

Anthes et al (1982) 經過模式的實驗，發現有些中尺度現象，如 Stationary mountain waves，並不受初始值誤差影響，他認為鋒生亦屬於此類。當大尺度運動上重疊小擾動 (誤差)，鋒的發生 (in Lagrangian coordinate) 仍然無可避免。雖然鋒生的地點、時間 (in Eulerian coordinate) 也許會改變。如果 Anthes et al 的實驗可以推廣到梅雨鋒，則  $r_K$  值將比慣性區段

預測的要長，或許到達無限大亦可能。

(f) 鋒的波譜

鋒生的理論，由 Hoskins 與 Bretherton (1972) 的 semi-geostrophic model 為濫觴，Hoskins 與 Bretherton 假設緯向 (x) 地轉平衡，經過 semi-geostrophic 的座標轉換：

$$X = x + f^{-1} V_g (x, z, t)$$

在 Boussinesq 假設及固定的 Brunt-Väisälä frequency 之下，鋒生的解析解相當於物理空間變形的 Eady wave。如此則有限時間內，Vortex filament 可以高度集中，Andrews et al (Andrews and Hoskins, 1978) 根據以上理論，將  $V_g (x, z, t)$  經過絕對動量座標 (Coordinate of absolute momentum) 轉換回  $V_g (x, z, t)$  即實際物理空間，再使用富氏分析，求出能譜：

$$\epsilon_K = (2 J_n (kr_0) / kr_0)$$

上式中  $J_n$  是 Bessel function of the first kind,  $r_0$  為初始波幅的垂直結構,  $|r_0| \leq 1$ , Andrews 發現對應不同的  $r_0$  值,  $\epsilon_K$  能譜的斜率皆為  $-8/3$ 。此結論足以佐證 Lilly 的結果 (見圖3)，鋒面系統 (wave length 約 2000 公里到 200 公里) 的運動，落在 3-D ( $-9/3$  slope) 與 2D ( $-5/3$  slope) 之間。而且具有 cascade 的性質。

三、鋒面系統的可預測度

(a) 鋒的次元 (dimensionality)

我們如果採取碎度 fractal (Mandelbrot, 1977) 的觀念，如何決定鋒面的次元呢？這裡的臆測是  $D = 2.25$ 。理由很簡單，經過線性內插，我們得到  $(2, -9/3)$ ,  $(2.25, -8/3)$ ,  $(3, -5/3)$  三組數，括弧中數目分別表示 (次元, 能譜斜度)，見圖四。符合所有已知的觀察與理論。

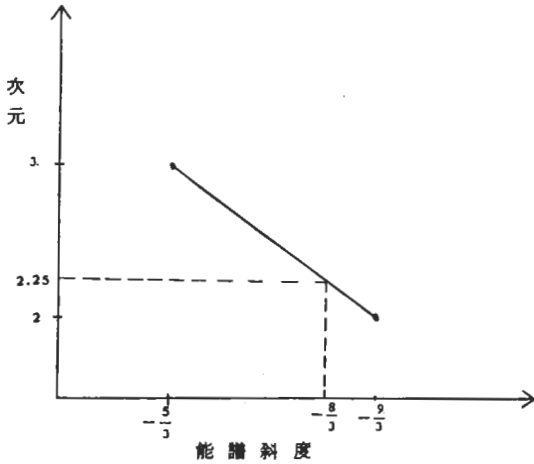


圖 4：由二維、三維紊流的次元，能譜斜度估算次地轉系統的次元。

(b) Kolmogorov 理論沿伸到 2.25 - D 紊流。介於 2D 與 3D 間的鋒面系統，將難以用物理單位的次元分析決定能譜，按照 Kolmogorov 的理論，假設 energy cascade 與 enstrophy cascade 對不同的  $k$  其值不變，則：

$$E(k) = r \cdot \epsilon^a \cdot \eta^b \cdot k^c$$

上式  $r, a, b, c$  為常數，各項單位分別是  $(k) [L^{-1}]$ ， $\epsilon [L^2 T^{-3}]$ ， $\eta [T^{-3}]$ ， $k [L^{-1}]$ ，如此可導出：

$$\begin{aligned} 2a - c &= 3 \\ -3a - 3b &= -2 \end{aligned}$$

但兩條方程式無法決定三項未知數，必須加入新的動力條件，此處適當的動力條件如 2. f 所敘，應該是 Hoskins 與 Bretherton (1972) 的 semi-geostrophic theory，即 Andrews 與 Hoskins (1978) 所求得的  $C = -8/3$ ，所以：

$$E(k) = r (\epsilon^{1/2} \eta^{3/2})^{1/3} \cdot k^{-8/3}$$

從上面分析，慣性區段決定的參數為  $\epsilon^{1/2} \cdot \eta^{3/2}$  及  $k$ 。我們可以重新定義 2.25 - D 紊

流的 energy-enstrophy cascade rate  $\theta = \epsilon^{1/2} \cdot \eta^{3/2} [L T^{-6}]$ ，可預測時間將為：

$$\tau = \theta^{-1/6} \cdot k^{-1/6}$$

以上  $\tau_K \sim k^{-1/6}$  的斜率與  $\tau_K \sim 1 / (k^3 \cdot \epsilon(k))^{1/2} = 1 / (k^3 \cdot k^{-8/3})^{1/2} = k^{-1/6}$  的斜率恰好相等，而後者經過 Orszag (1970)，Leith (1971) 等人首倡，已經廣泛的應用在計算二度空間紊流 closure model 上，較之純由次元分析的結果  $\tau_K \sim k^0$  合理得多。

$\theta$  的存在，使 Kolmogorov 理論從 2 - D 過渡到 3 - D 的過程得到完滿的解釋。慣性區段從 2 - D 轉換成 3 - D 時，energy flux 與 enstrophy flux 的權重 Weighting 亦隨之改變，必須有一波段， $\epsilon$  與  $\eta$  同時存在，獨立於  $k$ ，而且結合成單一變數，扮演  $\epsilon$  在 3D， $\eta$  在 2D 相同的角色。

(c) 相對可預測度 (relative predictability)

$\epsilon$  與  $\eta$  關係固定，但  $\tau$  的絕對值由  $\theta$  或未知常數決定，需要從經驗式或 closure model 求取，實際應用上，如果採取相對可預測度，定義為：

$$R_{K,K'} = \tau_K / \tau_{K'}$$

則  $R_{K,K'}$  單純由  $k$  決定，可以避免這困難。 $R_{K,K'}$  則  $k$  mode 相對於  $k'$  mode 預測時間之比，假設尺度 3000 公里 ( $k' = 2\pi / 3000 \text{ km}$ ) 的運動，我們能在兩天前預測，則尺度 300 公里 ( $k = 2\pi / 300 \text{ 公里}$ ) 的運動，有效預測時間為

$$\tau_K = \tau_{K'} \cdot R_{K,K'} = 48 \text{ hr} (300 / 3000)^{1/6} = 32.7 \text{ hr}$$

300 公里的運動已經屬於中尺度範圍，仍然可以在一天半前預測。這是 Semi-geostrophic system 類似二度空間運動溫和舒緩的特質。

(d) 鋒面系統的預測上限

以梅雨鋒為例，若鋒剖面包括鋒前，鋒後廣大的沉降區，則可到達 2000、3000 公里 (接近沿鋒尺度，約為 Rossby 變形半徑  $R_d = (g \cdot ($

$\Delta\rho/\rho) \cdot H)^{1/2} / f$  的長度)。在此剖面上，特異的天氣現象，按大小排列如下：

|     |      |    |   |
|-----|------|----|---|
| I   | 2000 | 公里 | 鋒面垂直剖面環流籠罩的區域                                       |
| II  | 1000 | 公里 | 衛星圖上拍攝的雲帶   |
| III | 500  | 公里 | 低層噴流，鋒面不穩定的中尺度低壓 Meso-low                           |
| IV  | 200  | 公里 | MCS ? 對稱不穩定 Symmetric Instability，雨帶 rainband，電線，暴雨 |
| V   | 50   | 公里 | MCS ? 大雷雨胞，驟雨                                       |

這裡的尺度將選擇 cross front 的方向。其中關於 MCS 的大小從衛星雲圖上觀察，其橢圓雲蓋所占據的面積往往多達 5~10 萬平方公里 (Akiyama, 1973, 陳泰然、吳、紀, 1986)，但根據最近 TAMEX 資料 (林和, 1987)，MCS 中強烈上昇運動皆集中在線形颱風區，應該屬於 IV 與 V 區域的運動，這裡我們將嚐試鋒面系統各現象可能的機制，在 Hoskins 與 Bretherton (1972) 的基本架構中定位，當然接近 50 公里尺度的現象大約已超出 semi-geostrophic 理論適用的範圍，可能更接近 3D 紊流，其相對可預測度如下：

|             |        |
|-------------|--------|
| $R_{II,I}$  | : 0.89 |
| $R_{III,I}$ | : 0.79 |
| $R_{IV,I}$  | : 0.68 |
| $R_{V,I}$   | : 0.54 |

TAMEX 期間的預報經驗，對鋒面發生的預測，大約不超過 48 小時，這是針對台灣區域是否受影響而訂的 criterion，若以 2000 公里系統，由 ECMWF 提供四天前的預測可供參考，設定  $\tau_K = 96$  小時，下表列出各種鋒面伴隨系統的預測極限

括弧中代表 Lilly and Peterson (1983) (表 1) 由實際觀測的能譜，再經過  $\tau_K = 6 / (k^3 E(k))^{1/2}$  公式，計算出來的預測時間，兩相比較，鋒面上各尺度運動，較非鋒面各尺度運

|         |           |              |
|---------|-----------|--------------|
| 2000 公里 | $T_I$     | : 96 小時 (96) |
| 1000 公里 | $T_{II}$  | : 86 小時 (72) |
| 500 公里  | $T_{III}$ | : 76 小時 (48) |
| 200 公里  | $T_{IV}$  | : 66 小時 (34) |
| 50 公里   | $T_V$     | : 52 小時 (14) |

動的預測時間要長，尤其在 500 公里以內，幾乎達 2、3 倍。這意味如果綜觀尺度的鋒生能夠在四天前報準，暴雨預報理論上可在兩天前預測。

當然，Hoskins 與 Bretherton (1972) 的模式，未曾考慮到水汽的因素，這裡假設 Synoptic Scale 的運動，透過動力機制，強迫出中尺度各現象 (energy-entropy cascade)，水汽不破壞各尺度間的 local interaction，實際上，水汽具有強大的影響力 (Mak, 1982)，而我們這裡所列的，將是鋒面各系統預報度的上限，如果加上水汽，尤其是  $T_{IV}$ ， $T_V$  必定會降低不少。

#### 四、討論

大氣中能量源自太陽，赤道增溫、極地冷卻，生產可用位能。在中、高緯度，透過斜壓的浮力效應，將位能轉換成動能，這過程從行星尺度到羅士培變形半徑的擾動，皆能有效執行。動能產生後，分成兩支在能譜上擴散，一支趨向更大尺度，靠艾克曼填塞作用，消逝為摩擦熱，一支循更小尺度而下，逐漸傾斜，由二維運動進化至更為活躍的三維運動，這裡轉換的關鍵，即是鋒生過程。

大氣必須靠鋒生過程，破壞熱力風平衡，藉以解除二維運動的限制，而鋒面挾帶的各種中尺度系統，將快速的輸送能量到次網格式紊流，如此完成整個能量輸遞鏈。從這觀點，鋒系統的統計動力性質，相當重要。

根據 Kolmogorov 慣性區段理論，借助 Semi-geostrophic theory 鋒系統的能譜斜率已知為  $-8/3$ ，本文據此計算鋒系統的可預報度，這裡估計的可預報時間，係對應 2.25 維的非線性

流體而言，2.25 維紊流將以  $\theta = (\text{energy flux})^{1/2} \cdot (\text{enstrophy flux})^{1/2}$  的比例 cascade。

一旦知道  $\theta$  存在，即可找到可預報度上限，對預報作業特別具有意義之處，即是計算各尺度間相對的預測極限，如果鋒由大尺度運動強迫產生，而鋒面上各中尺度系統又透過繞鋒環流滋長，則可預測度將由各個尺度現象在能譜的位置決定。能譜若要達到統計平衡，各尺度運動的生命期與可預測度，需相互調整成適當值。

沿著本文研究的方向進行，以下為待決的問題：

- (1) 澄清 Eulerian 與 Lagrangian 可預測度的區別。Euler 座標中，如果加上一項常數基本流，等於經過伽利略轉換，不會影響到運動方程式。同樣情形，也發生在大小尺度能量交換的過程，例如直徑兩百公里的颱風，放置在數千公里寬的駛流中央，颱風的位置隨駛流改變，但颱風與駛流之間並無能量交換。所以非線性理論必須通過 Galilean Invariant 的考驗，如此得到的結果，對天氣預報而言，只能告訴我們天氣事件發生 (occurrence) 的可預測度，而不能說明天氣事件位置 (location) 的可預測度。這方面的理論頗為稀少。
- (2) 如何在 Quasi-geostrophic, Semi-geostrophic, balance, primitive ..... 系統間，使慣性區段的理論連結成統一 (unified) 的概念模式？或者，更基礎的問題恐怕是：大氣中運動的次元轉換 (dimensional transition) 屬於連續性 (continuous) 或離散性 (discrete)？若屬離散性，我們又如何量子化 (quantize) 各次元層間之區隔？這可能觸及到動力氣候中最核心的課題。

## 參考文獻

- 林 和，1988：TAMEX 期 IOP I 颱風結構的分析。(準備中)
- 陳泰然、吳倩雯與紀水上，1986：梅雨期東亞及

西太平洋中尺度對系之氣候特徵。大氣科學，13, 33-45。

- Akiyama, T., 1973: The large-scale aspects of the characteristic features of the Baiu Front. *J. Meteor. Soc. Japan*, 24, 2, 158-187.
- Andrews, D.G. and Hoskins B.J., 1978: Energy spectra predicted by semi-geostrophic theories of frontogenesis. *J. Atmos. Sci.*, 35, 509-522.
- Anthes, R.A., Kuo Y.H., Benjamin S.G. and Li Y.F., 1982: The evolution of the mesoscale environment of severe local storms preliminary modeling results. *Mon. Wea. Rev.*, 110, 1187-1213.
- Bentsson, L., 1975: 4-dimensional assimilation of meteorological observations, GARP Publication Series No. 15.
- Chen, G.T.J., 1977: An analyses of moisture structure and rainfall for a Mei-Yu regime in Taiwan. *Proc. Natl. Sci. Council.*, 1, 11, 1-21.
- Chen, G.T.J. and Chang C.P., 1980: The structure and vorticity budget of an early summer monsoon trough over southeastern China and Japan. *Mon. Wea. Rev.*, 108, 942-953.
- Hoskins, B.J. & Bretherton F.P., 1972: Atmospheric frontogenesis models: mathematical formulation and solution. *J. Atmos. Sci.*, 29, 11-37.
- Kalnay, E. and Livezey R., 1985: Weather predictability beyond a week: an introductory review. *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*. North-Holland, 311-346.
- Kolmogorov, A.N., 1941: Local structure of turbulence in an incompressible fluid at very high Reynolds numbers. *DOKLADY AN SSSR*, 30, 4, 299-303.
- , 1962: A refinement of previous hypothesis concerning the local structure of turbulence in viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 13, 1, 82-85.
- Leif, C.E., 1971: Atmospheric predictability and two-dimensional turbulence. *J. Atmos. Sci.*, 28, 145-161.
- Lilly, D.K., 1983: Theoretical predictability of small-scale motion. *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*. North-Holland. 281-289.
- Lilly, D.K., and Petersen E.L., 1983: Aircraft measurements of atmospheric kinetic energy spectra. *Tellus*, 35A, 379-382.



- Lorenz, E.N., 1963: Deterministic nonperiodic flow. J. Atmos. Sci., 20, 130-141.
- , 1969: The predictability of a flow which possesses many scales of motion. Tellus, 21, 289-307.
- Lovejoy, S. and Mandelbort B.B., 1985: Fractal properties of rain and a fractal model. Tellus, 37A, 209-232.
- Mak, M., 1982: On moist quasi-geostrophic baroclinic instability. J. Atmos. Sci., 39, 2028-2037.
- Mandelbort, B.B., 1977: FRACTALS form, change, and dimension. W.H. Freeman and Company.
- Orszag, S., 1970: Analytical theories of turbulence. J. Fluid Mech., 41, 363.
- Palmen, E. and Newton C.W., 1969: Atmospheric circulation systems. Academic Press.
- Pedlosky, J., 1979: Geophysical fluid dynamics. Springer-Verlag. New York Inc.
- Rhines, P.B., 1979: Geostrophic turbulence. Ann. Rev. Fluid. Mech., 11, 401-441.
- Robinson, G.D., 1967: Some current projects for global meteorological observation and experiment. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 93, 409-418.
- Thompson, D., 1983: A review of the predictability problem. Predictability of fluid motions, 1-10. American Institute of Physics, N.Y.
- White, G.H., 1980: Skewness, kurtosis and extreme values of northern hemisphere geopotential heights. Non. Wea. Rev., 108, 1446-1455.
- Williams, R.T., 1967: Atmospheric frontogenesis: a numerical experiment. J. Atmos. Sci., 24, 627-641.

## THE THEORETICAL LIMIT OF FRONTAL PREDICTABILITY

*LinHo*Department of Atmospheric Sciences  
National Taiwan University

(manuscript received 5 January, 1988; in final form 23 February, 1988)

## ABSTRACT

The frontal system, concentrated with temperature gradient and vorticity, epitomized the nonlinear exchange of energy between different scales of eddies. The steepening of isentropic surface along the front leads to the breakdown of thermal wind balance, hence the appearance of a solenoidal circulation. The vortex tube is stretched such that the restriction of two-dimensionality will be relaxed. The semi-geostrophic theory predicts a energy spectrum slope of  $-8/3$ . We interpreted this result as a sign of 2.25 dimensions for frontal system. Using Kolmogorov inertial range assumption, the predictability of semi-geostrophic flow can be found. It is expected that if the occurrence of a 2000km front can be predicted four days ahead, the heavy rainfall has a theoretical predictable time about 2 days. We also noted that for 2.25D turbulence the inertial range is characterized by a composite cascade rate  $\theta = (\epsilon^{1/2} \eta^{3/4})$ , where  $\epsilon$  is the energy cascade rate and  $\eta$  is the enstrophy cascade rate.

Key words: front, predictability, dimension, semi-geostrophic, inertial range.