

衛星遙測垂直大氣溫度剖面 ——研究“受約束之線性反演法”

柳中明

譚允中

國立台灣大學大氣科學系

(中華民國七十五年八月三十日收稿，十月八日定稿)

摘要

本文採四階段研究“受約束之線性反演法”內參考波數、任意函數、展開項數、參考常數、先驗剖面等因子，對衛星遙測垂直大氣溫度剖面影響之敏感性與相關性問題，並研究應用此反演法於實際作業中之可能性。

結果指出，若修正反演法為計算偏離先驗剖面之差值剖面時，將能至少改進反演誤差一倍以上。其次，反演結果受所選擇之任意函數影響至鉅，因此，若取具代表性之函數——譬如 Wark and Fleming(1966) 所建議之經驗正交函數，或將能降低反演誤差。此外，當取參考常數小於1時，將無法獲取穩定且誤差低之解；但參考常數大於1，再配以低函數展開項數，將能獲取穩定且誤差低之解。再者，修正後之反演法被應用於反演75年2月22日台北之溫度剖面，所得解在100 mb 以下溫度之均方根差為2.3℃，已非常接近一般反演系統之結果2℃，更較原始之反演法降低誤差近10倍。

綜結所得，修正反演法為反演偏離先驗剖面之偏差值的觀念，為Fritz et al (1972) 所建議，並用於其他許多反演方法。修正後之形式，再配以參考常數與展開項數之選擇研究，已克服過去認為此反演法太受參考常數影響，而難用於實際作業中之困難。

一、簡介

衛星遙測大氣垂直溫度剖面的理論與技術，在國外自King (1956) 提出此構想以來，已發展近30餘年。所設計之測量儀器亦由七個波段的SIRS，演進到27個波段的TOVS (TIROS-N Operational Vertical Sounder)，精確度不斷地在改進中。

基本上，大氣垂直溫度剖面的決定，是依據無雲狀況下之長波輻射傳遞方程式，以反演衛星儀器所測輻射量內隱含之溫度垂直變化。其中含有三項

工作：1是選定輻射測量波段，2是過濾雲存在的影響，3是解輻射傳遞方程式。由於衛星儀器均是指向地面，是以所測長波輻射波段較之短波，在受地面與大氣影響上來得單純，同時亦能應用於夜晚測量。此外二氧化碳在15微米波長附近和氧在2公分波長附近的吸收段，若仔細分辨，又能找到數個代表垂直不同高度的特徵波段，是以一般均採用這些波段作大氣垂直場的測量。近數年來，發現採用其他不同波段，利用統計迴歸分析法，亦能在某些

特殊天氣狀況下，加強所得溫度剖面之精確度。(Liou, 1980; Houghton et al, 1984)

至於過濾雲的影響，可謂遙測技術上最大困難。由於雲對地面長波輻射具相當之減弱影響，一般以為衛星所測輻射量實際來自雲頂以上大氣，是以若能知雲頂高度，則所反演之大氣溫度剖面僅代表雲頂以上大氣結構。對於雲頂以下大氣，則需由長期統計資料或最近天氣資料中猜測。但設若儀器視野中並非晴空亦非全為雲所遮蔽，即輻射量中僅含部分雲的影響，則問題不再如上述之單純。而要如何說明所測輻射量之物理意義，並由其中找出垂直大氣結構，此乃為具最大挑戰性之問題。一般或用數理計算，或用統計資料，設法於輻射值中推出若是晴空時所應測得之輻射量，再由其中反演大氣結構。(McMillin and Dean, 1982)

最後，如何解輻射方程式以反演大氣結構呢？由於儀器所測輻射波數必為有限，但垂直剖面却為無限點所結合，此問題先天上已是條件不足。而大氣結構又是隱含於第一類福萊得合(Fredholm)積分式中，所得之解不具唯一性，且各類解法亦含不穩定性，且為非線性，所以解輻射方程式以反演大氣結構的問題，實不單純。(Rodgers, 1976)

本文主要研究“受約束之線性反演法”在反演大氣結構時，各項參數之敏感性問題，並研究如何選取最佳參數，與如何修正反演法，以降低反演誤差。“受約束之線性反演法”詳載於Twomey (1977)，為討論大氣遙測之基礎反演法。Twomey以理想之函數資料來分析此法，認為此法穩定性太差，且參考係數變化之影響太大。Wark and Fleming (1966)亦曾用標準大氣為例，嘗試解VTPR (Vertical Temperature Profile Radiometer)之輻射值，同樣發現參考係數影響結果甚大。此外尚有許多類似研究均皆不鼓勵使用此法於反演作業系統中。本文企圖由不同參數之敏感性與相關性研究上著手，設法修正反演法，以求穩定且誤差小之新法與參數組合，並期望在克服所有困難後，能有效應用於實際作業系統中。

本文取Liou (1980)所提供之溫度場數據資料和NOAA-4 VTPR 穿透函數數據資料，研究“受約束之線性反演法”對於任意函數、參考係數、展開項次、參考波數，先驗剖面等因素變化之敏感性，分析其反演誤差受控之情況，並尋求誤差改善之途徑。同時，亦嘗試反演75年2月22日00Z台北垂直探空剖面，以研究修正後之“受約束之線性反演法”之應用價值。

二、理論

當晴空無雲時，不考慮大氣散射作用，衛星儀器所測之長波輻射量， $I_\nu (P=0)$ ，可以下表之：

$$I_\nu (P=0) = B_\nu (T_s) T_\nu (P_s) + \int_{P_s}^0$$

$$B_\nu [T(P)] \frac{\partial T_\nu (P)}{\partial P} dp \quad (1)$$

其中， $B_\nu (T)$ 為蒲朗克函數， $T(P)$ 為溫度， P 為氣壓， $T_\nu (P)$ 為穿透函數， $\frac{\partial T_\nu (P)}{\partial P}$ 為權重函數， ν 為波數。式①說明衛星所測輻射量 $I_\nu (P=0)$ 主要來自第一項的地面長波貢獻與第二項的大氣長波輻射。曾 (1983) 曾詳細說明此式。其中地面貢獻僅占全部輻射量之 0.01 以下，相當微小。

式①中，權重函數應為溫度與壓力之函數，但在遙測作業或研究中，為避免反演之困難，多將過去大氣資料先經整理後，計算平均權重函數，而採納於式①中。是以式①中唯一之未知數應為隨壓力變化之蒲朗克函數。而蒲朗克函數又為溫度之函數，是以倒演蒲朗克函數，即得溫度隨垂直高度之變化。以下討論乃以反演蒲朗克函數為重點。

設若儀器所測波段是在二氧化碳 15 微米附近，依最小平方方法，可將不同波段之蒲朗克函數 $B_\nu (T)$ 與某個固定參考波數 (ν_r) 之蒲朗克函數 $B_{\nu_r} (T)$ 間之相關，以下式表之：(Liou, 1980)

$$B_\nu (T) = C_\nu B_{\nu_r} (T) + d_\nu \quad (2)$$

式中 C_ν 與 d_ν 係隨參考波數而改變之訂正係數。

如此，①式可改變為

$$\frac{I_{\nu}(P=0) - B_{\nu}(T_s) T_{\nu}(T_s) - d_{\nu}}{C_{\nu}} =$$

$$\int_{P_s}^0 B_{\nu_r}(T(P)) \frac{\partial T_{\nu}(P)}{\partial P} dp \quad (3)$$

積分項內 $B_{\nu_r}(T(P))$ 僅為壓力之函數，可以 $f(P)$ 表之。左項內地面貢獻量微小，或可忽略之，或可採用觀測資料，對③式毫無影響，是以左項以 $g(\nu)$ 代之。此外，再令權重函數 $K(\nu, P) = \frac{\partial T_{\nu}(P)}{\partial P}$

，則③式可改寫為

$$g(\nu) = \int_{P_s}^0 f(P) K(\nu, P) dp \quad (4)$$

④式即為第一類之福萊得合 (Fredholm) 積分式，也即為最基本形式之大氣反演方程式。

設若衛星儀器上設有 M 個長波波段觀測，波段為 $\nu_i (i = 1, 2, \dots, M)$ ，則④式可改寫為

$$g(\nu_i) = \int_{P_s}^0 f(P) K(\nu_i, P) dp, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (5)$$

再假設 $f(P)$ 可以 n 個任意參考函數 $W_j(P) (j = 1, 2, \dots, N)$ 展開為

$$f(P) = \sum_{j=1}^N f_j W_j(P) \quad (6)$$

其中 $f_j (j = 1, 2, \dots, N)$ 為線性係數，則⑥式可改寫為

$$g_i = \sum_{j=1}^N f_j A_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (7)$$

其中 $g_i = g(\nu_i)$ 且 $A_{ij} = \int_{P_s}^0 W_j(P) K(\nu_i, P) dp$ 。

將⑦式以向量、矩陣等表之，即為

$$G = A \cdot F \quad (8)$$

⑧式之基本線性解為

$$F = (A^T A)^{-1} A^T G \quad (9)$$

此解與最小平方解同 (Twomey, 1977)，但所得之解將擴大計算 $(A^T A)^{-1}$ 或 A^{-1} 時所造成的誤差，穩定性極差，可信賴度低。其原因主要在於缺乏控制解值的額外條件，以減少計算 $(A^T A)^{-1}$ 或 A^{-1} 時誤差存在的影響。此外，設若儀器測量誤差為 ϵ ，則 G 以 $G + \epsilon$ 取代，誤差將以 $(A^T A)^{-1} \epsilon$

或 $A^{-1} \epsilon$ 擴張。當 A 之特徵值愈小時，誤差擴張將愈形嚴重。⑨式即為直接線性反演法 (Liou, 1980)。

最為一般所接受的控制條件，即為要求最後解得之 F 向量為趨近平滑之解。至於平滑之要求條件有 $\sum_{i=1}^N f_i^2$ 或 $\sum_{i=1}^N (f_{i-1} - f_i)^2$ 或 $\sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})^2$ 等趨近最小值等多種。若以矩陣表之，即為要求 $F^T H F$ 為最小值，其中 H 為 $N \times N$ 之矩陣，將因所選擇標準不同而異。如此再配合最小平方法，以減少解⑨式所造成之誤差，也即為減小 $(AF - G)^T (AF - G)$ 之值。乃得為減少 $(AF - G)^T (AF - G) + \gamma F^T H F$ 之值，其中 γ 為參考係數，或稱未定之拉式乘數。以數學式子表之，即為要求

$$\frac{\partial}{\partial f_k} [(AF - G)^T (AF - G) + \gamma F^T H F] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

乃得解

$$F = (A^T A + \gamma H)^{-1} A^T G \quad (11)$$

當 $\gamma = 0$ 時，⑪式即為⑨式。當 $\gamma \rightarrow \infty$ 時，則平滑條件控制反演解。若得適當 γ 值時，⑪式所得之 F 解將權衡滿足二個控制條件，而得合理解，此法即為受約束之線性反演法。其在控制測量誤差上乃由平滑條件負責壓制誤差擴張現象。當然如何選定適當之 γ 值仍為最重要之問題。至於平滑標準，本文將採 $\sum_{j=1}^N (f_j - \bar{f})^2$ 為最小值 (Liou, 1980)，所以 H 函數為

$$H = \begin{bmatrix} (1-N)^{-1} & -N^{-1} & -N^{-1} & \dots & -N^{-1} \\ -N^{-1} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -N^{-1} & -N^{-1} & -N^{-1} & \dots & (1-N)^{-1} \end{bmatrix} \quad (12) \quad N \times N$$

受約束之線性反演法最早由 Twomey (1963)，Tikhonov (1963) 所提出，Twomey (1977) 介紹詳盡，國內曾 (1983) 亦曾詳細說明。一般認為此法必須作矩陣計算，隱含計算誤差，同時亦耗計算時間。再者⑥式中要求選定 N 個 $W_j(P)$

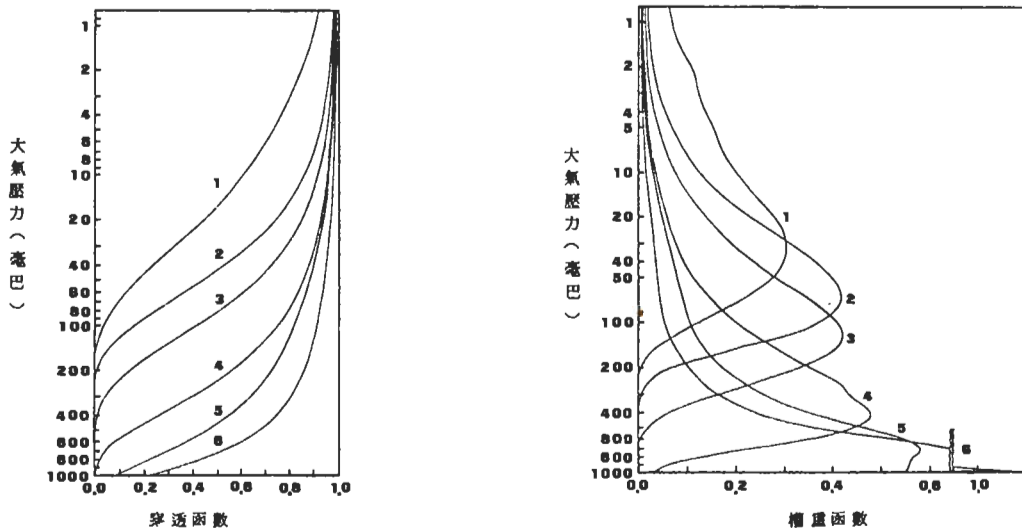


圖 1 (a) NIMBUS-4 VTPR 1~6 頻道之穿透函數 (b) NIMBUS-4 VTPR 1~6 頻道之權重函數
(數據來自 Liou, 1980)

函數以代表 f 函數，那麼這些函數要如何選定呢？Wark and Fleming (1966) 認為由過去探空觀測資料中，可尋找經驗正交函數為最佳之代表函數。但設若缺乏過去資料時要如何設法呢？此時①式中參考常數 γ 值之選定更為複雜。當然在研究中可以一再試驗以找出最佳數值，但若在正常作業中，如何訂定標準以統一 γ 值呢？以上考慮使得此法從未被應用於實際反演作業中。Twomey (1976) 曾以理想之函數來代表 F 、 G 、 K 、 W 等，以研究 γ 值變化的影響。其實驗中 γ 值由 1 減至 0，而得 γ 值約趨近 10^{-12} 時，結果最好，但再減少即會有震盪現象發生。Wark and Fleming (1966) 則以標準大氣為實驗對象，認為 $\gamma = 10^{-5}$ 時之解最佳。此外尚有許多相關研究，但均未試解 γ 大於 1 的情形。對於任意函數 $W_j(P)$ 的影響，更是未嘗分析。

本文採用 Liou (1980) 所提供之大氣溫度剖面及 VTPR 儀器資料，研究“受約束之線性反演法”內各項因子之敏感性與相關性問題。譬如選定不同任意函數 $W_j(P)$ 的影響，參考係數 γ 的變化，以及在無過去探空資料的前提下，建立正常作業時之考慮等。共區分為四階段研究，逐次剝析，並

進而修改原始反演法，以穩定與降低反演誤差。

三、“受約束之線性反演法”研究結果與討論

三. 1 第一階段研究

本階段採用 NOAA-4 VTPR 數據，其中 6 個 CO_2 頻道分別為 669.0, 676.7, 694.7, 708.7, 723.6 與 746.7 cm^{-1} 。參考 Liou (1980) 所提供之數據，此 6 個頻道的穿透函數繪於圖 1 (a)，所計算出之權重函數繪於圖 1 (b)。此 6 頻道所具最佳反演高度分別為 30.2mb、68.8mb、117.9mb、412.2mb、725.7mb 與地面 1000mb。若假設實際大氣之溫度剖面如圖 2 (Liou, 1980)，則採用①式，VTPR 所測之輻射強度，在晴天無雲時應分別為 52.3, 47.2, 45.7, 53.0, 68.6 與 81.3 erg. sec. cm^{-1} 。本階段研究乃採用以上數據，依①式先解得蒲朗克函數，再推求溫度剖面。亦即採用標準尚未經修正之“受約束之線性反演法”來反演圖 2 之溫度剖面。由於此過程中，有許多值得推蔽與分析者，吾人乃設計列於表 1 中之各個實驗，同時列明當時設計所考慮之研究目的。所得之結論略述於下：

實驗一採用 4 種不同函數，分別展開②式，以

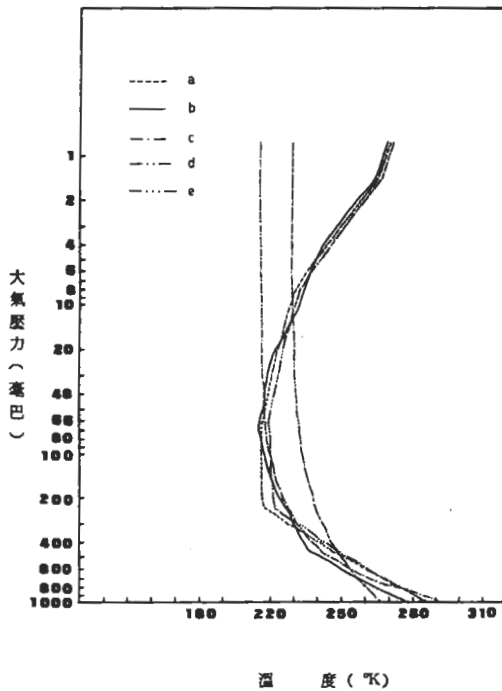


圖 2 (a) ----- 美國國家標準大氣溫度剖面
 (b) —— VTPR 實際大氣溫度剖面 (Liou, 1980)
 (c) -·-·- 第一階段研究反演所得最佳溫度剖面 (f_2 函數, 項數 $N = 4$, 參考常數 $\gamma = 2$, 參考波數 $\gamma_r = 745.0 \text{ cm}^{-1}$)
 (d) - - - - 第二階段研究反演所得最佳溫度剖面 (f_2 , $N = 2$, $\gamma = 1$, $\gamma_r = 745.0 \text{ cm}^{-1}$)
 (e) - · - · - 第三階段研究反演所得最佳溫度剖面 (f_1 , $N = 2$, $\gamma = 1$, $\gamma_r = 745.0 \text{ cm}^{-1}$)

表一 第一階段研究的實驗設計

| 實驗項次 | 研 究 | 目 的 |
|------|---|--|
| 1 | 在⑥式中之任意參考函數試以四種不同的函數展開, 分別為 ① $f_1 = \sin(2\pi \cdot \frac{p}{p_s} (J-1))$, ② $f_2 = (\frac{p}{p_s})^{l-1}$, ③ $f_3 = [l \cdot (p+1)]^{l-1}$, 和 ④ $f_4 = l \cdot \{ [l \cdot (\frac{p}{p_s} + 10)]^{l-1} \}$ 並允許變化展開的項數。其中 p 表各層氣壓, p_s 表地面氣壓, J 表展開項數。 | 比較不同的函數展開對於“受約束之線性反演法”所造成的影響。 |
| 2 | 在①式中的垂直座標, 分別取 p 或 $l \cdot p$ 。 | 比較使用不同座標對①式解所造成的影響。 |
| 3 | 在②式中所取的參考波數 (γ_r), 選用不同的波段測試。 | 各波段的權重函數在③中各不相同, 分別測試以觀察其差異。 |
| 4 | 在①式中任意變化參考常數。 | 由參考常數的改變, 看出它對解①式造成的影響。 |
| 5 | ⑥式中之任意函數採用 f_3 方式展開, 但改為以多變數線性迴歸法, 先找得一溫度剖面, 其相對應之滿朗克函數為 f_3 之線性組合, 再沿用實驗項目 1 中 f_3 的方式, 反演大氣剖面。 | 因實驗 1~4 結果不佳, 推測是函數本身特性上就不配合, 此項實驗假若仍然如實驗 1 之結果, 表示此法將趨近於表現函數的特性, 而不是取決於使用的數據。 |

分析“受約束之線性反演法”對展開函數之敏感性。當以 $f_1 = \sin(2\pi \cdot \frac{P}{P_0} \cdot (J-1))$ 函數，展開⑥式時，因為受限於該函數的型式，使得在有限項內展開，會得到負的蒲朗克函數，不合於所需求。此外， $f_2 = (\frac{P}{P_0})^{J-1}$ 函數，展開項中為避免氣壓值次方太大，故除以地面氣壓值。 $f_3 = \ln(P+1)^{J-1}$ 函數，展開項則直接應用氣壓的次方，但是再取對數值以避免溢位的發生。 $f_4 = \ln\{\ln(\frac{P}{P_0} + 10)\}^{J-1}$ 函數，展開項合併 f_2 及 f_3 之特性加以修正，為避免取對數值後出現負數，故在其中加入 10 的常數。但因取兩次的對數後，各層的蒲朗克函數變化很小，溫度剖面接近於同溫，亦不合於所需求。此外由於受限於電腦的計算能力，只能以有限項展開 f_2 和 f_3 。實驗中分別以 4、6、8 項展開，發現以四項展開的方式所得誤差最小，其中又以 f_2 展開為最佳。

實驗二在分析 P 或 ln P 座標對於解值之影響，而用 f_2 展開時取 P 為垂直座標較合適，因為將某一高度氣壓除以地面氣壓，其值必然很小；而若將壓力再取對數，則各層間差異性難以表現。以 f_3 展開時則以 ln P 為垂直座標較佳，因氣壓的變化可由幕次增加使其迅速擴大，若採用較小之數值時，運算產生之誤差也較小。

實驗三採用不同的參考波數 (ν_r)，研究其對解值所造成的改變。結果如圖 3，顯示以第一個頻道運算所得溫度誤差 (r.m.s) 最大，依所取波數的增加而逐漸改進，以第六個頻道所得誤差最小。此乃因第六個頻道權重函數之極大值位於六個頻道之極大值中最低層(地面)所致，使得低層的估計較準確，而一般誤差的主要來源均由低層所引起，故選擇第六個頻道可使整層大氣溫度剖面之誤差降低。

實驗四比較不同的參考常數所造成的結果，參考常數分別為 0、2、4、6 和 8。當參考常數取 0 時，相當於採用“直接線性反演法”，所得結果中會出現負的蒲朗克函數，不合於需求。若採用 0

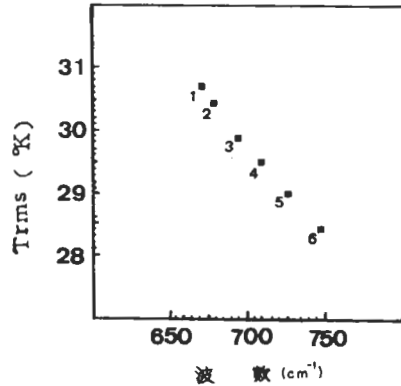


圖 3 每一階段研究實驗之中採用 f_2 函數 (參考表一)，經展開 8 項，且參考常數取 2 時，採用不同頻道為參考波數 ν_r ，所得溫度剖面之均方根差 Trms (單位 °K)。

以上的值代入，所得結果變化不大 (10%) 以內。

由實驗一至四之結果注意到：所得之溫度剖面形狀在低層 (50mb 以下) 尚與實驗大氣情形接近，但在較高的平流層中則無逆溫出現，推測是由於所取任意函數的特性所造成。此情形可由圖 2 中所示反演得溫度剖面 and 圖 2 中原始剖面相比較，即可看出。圖 2 中虛線 (---) 代表反演中取 f_2 函數，4 項展開， $\gamma = 2$ ， $\nu_r = 745.0 \text{ cm}^{-1}$ ，P-座標等，仔細分析可看出此反演得溫度剖面具其參考函數 (f_2) 之垂直分布特徵。

實驗五乃假設若溫度剖面之蒲朗克函數，可以參考函數之線性組合表示，則若以此參考函數作為任意函數展開，再使用“受約束之線性反演法”，以觀察所反演得剖面是否與溫度剖面相似，或是仍趨近於函數特性。實驗設計利用多變數線性迴歸法採用 f_2 函數組合已知的蒲朗克函數 (由⑥式)，找出各展開項中與蒲朗克函數相關性最高、最重要的兩個展開項與該兩項的係數，這兩項展開的結果大致符合實際大氣中蒲朗克函數特性。再以其相應之溫度剖面代替圖 2 之剖面，同樣計算 VTPR 的輻射值，而依“受約束之線性反演法”求解。並同樣以 f_2 函數展開。但最後反演得之溫度剖面仍又形成無逆溫的現象，溫度隨高度增加而遞減，且類似

表二 第二階段研究的實驗設計

| 步 驟 | 研 究 | 目 的 |
|-----|--|--|
| 1 | 固定函數展開項為四項，依次變化參考常數 (γ) 由 10^{-8} 至 10^0 。 | 找尋使誤差最小的參考常數 (γ) |
| 2 | 由步驟 1 所得結果選取最適當之參考常數 (γ)，再依次變化展開項數由二項至八項。 | 在最適當之參考常數 (γ) 條件下，找尋使誤差最小的展開項數。 |
| 3 | 由步驟 2 所得結果，固定使用最適當之展開項數，再依次變化參考常數 (γ) 由 10^{-15} 至 10^1 。 | 在使誤差最小之展開項數條件下選取最適合該項數的參考常數 γ 。 |

原本展開函數的形式 (實驗一之解)。這表示“受約束線性反演法”受任意參考函數的影響非常大，而非受溫度剖面之絕對影響，是以所得結果將趨近於該函數的特性。

以上略述第一階段的研究結果，詳情請閱譚與吳 (1986)。結論為即使在最佳控制各變數下，計算所得仍有相當誤差，此誤差主要來源於任意函數無法正確表示蒲朗克函數。可見“受約束之線性反演法”受任意參考函數的影響很大，若可由統計資料中找到具代表性之函數作展開，或許可使此法的計算結果更為準確。

三. 2 第二階段研究

本階段研究參考常數 (γ) 和函數展開項數 (N) 間之相關敏感性，實驗步驟見表 2。仍利用①式反演蒲朗克函數，再由此推得各層溫度。但在②式中之蒲朗克函數則利用美國國家標準大氣 (1976) 資料模擬而得。各變數則沿用上一階段最佳之結果，選擇第六頻道為固定參考波數， f_2 配合 P 為垂直座標， f_1 則配合 $\ln P$ 為垂直座標，其餘資料數據與第一階段數據相同。

實際作業中，僅有資料應為衛星所測各波段輻射強度，利用③式可將輻射強度轉換為 g 值。真實的 g 值和最終由計算所得之 g 值比較誤差，即得 $g_{r.m.s.}$ ；基本上 $g_{r.m.s.}$ 值愈小，所得結果愈可信賴。此外，研究中已有實際大氣溫度剖面，乃可直接計算反演溫度之均方根差 ($T_{r.m.s.}$)。另所用波段最高層準確至 30mb，而有興趣之溫度剖面在 50mb

以下，故另計算 50mb 以下溫度均方根差，($T_{r.m.s.}^{50}$) 以作分析參考。本階段分析即採用此三種資料 ($g_{r.m.s.}$, $T_{r.m.s.}$, $T_{r.m.s.}^{50}$) 作評估。

本階段研究主要期望確定函數展開項數與參考常數之相關性與選擇組合。是以設計先決定參考常數，再分析展開項數，而後再變化參考常數的研究方式，並以 $g_{r.m.s.}$ 值作為決定參考，另分析 $T_{r.m.s.}$ 以作客觀參考。未來其他研究或實作中若有變化函數展開項數和參考常數之需要時，本研究結果將有所助益。

此階段所得結果如下述。步驟一在比較展開項數 (N) 為四項時，參考常數變化造成的影響，其結果示於圖 4。

當所取參考常數 (γ) 在 0 到 1 的範圍內時，計算所得 $g_{r.m.s.}$ 並不穩定， $T_{r.m.s.}$ 和 $T_{r.m.s.}^{50}$ 的誤差值亦相當大，在部分層甚至可得到負的蒲朗克函數。但若參考常數大於 1 時， $g_{r.m.s.}$ 、 $T_{r.m.s.}$ 和 $T_{r.m.s.}^{50}$ 誤差小而且變化穩定。此結果顯示當參考函數以四項展開時，選用大於 1 之參考常數較佳。此結果不同於 Twomey 所認為 γ 應取很小的值，這是因 Twomey 的計算是在理想狀況下所得，而本研究是利用實際資料推演。本步驟得誤差最少為 f_2 ， $N = 4$ ， $\gamma = 2$ ， $g_{r.m.s.}$ 是 $22.873 \text{ erg. sec}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$ ， $T_{r.m.s.}$ 是 16.1°K ， $T_{r.m.s.}^{50}$ 是 12.31°K 。

步驟二則取前一步驟中最佳參考係數 (γ 取大於 1) 為固定值，研究展開項數的變化，結果示於圖 5 a、b、c 發現 $g_{r.m.s.}$ 大致隨展開項數的增加而增加，當展開項數超過 7 項時，誤差的增加更為

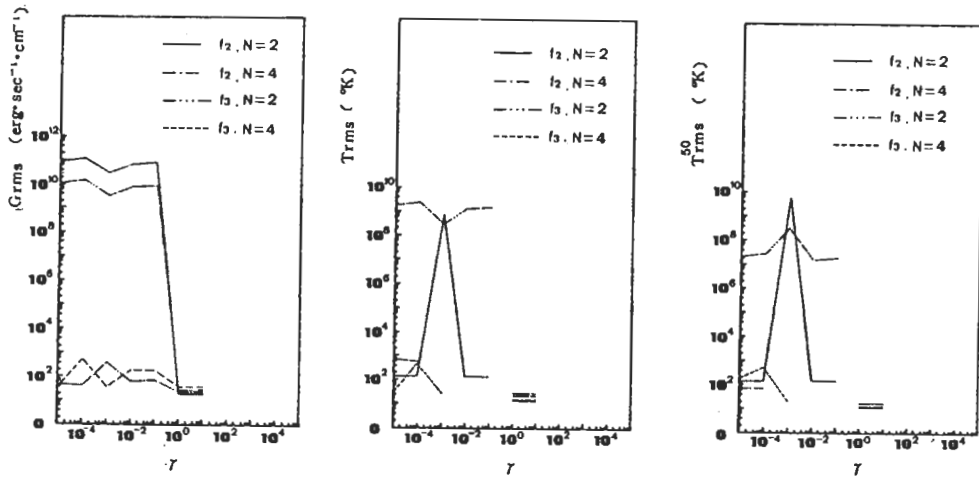


圖4 第二階段研究中，在不同函數 f 與展開項數 N 下，改變參考常數 γ 值所得 (a) Grms (b) Trms (c) $Trms^{50}$ (函數 f_2, f_3 ，參考表一，Grms, Trms, $Trms^{50}$ 參考 3、2 節)
 (註：圖(b)與圖(c)中，在 γ 小於 1 範圍內，由於反演所得蒲朗克函數會出現負值，所以有些區域無法計算 $Trms, Trms^{50}$ ；另由於 Grms, Trms 與 $Trms^{50}$ 變化太大，故 y 軸取為時數座標。在 γ 大於 1 範圍內，則變化不明顯。)

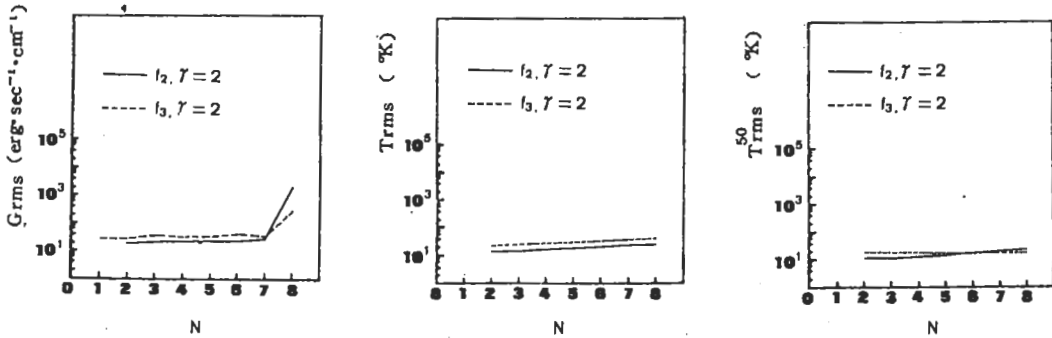


圖5 第二階段研究中，在不同函數 f 與參考常數 γ 下，改變展開項數 N 值所得 (a) Grms (b) Trms (c) $Trms^{50}$ (函數 f_2, f_3 ，參考表一，Grms, Trms, $Trms^{50}$ 參考 3、2 節)

劇烈。展開二項較展開四項約減少 15% 的誤差。對於整層溫度誤差或 50mb 以下溫度誤差而言，項數的增加亦導致誤差的提升。誤差最少為 $f_2, \gamma = 2, N = 2$ 時， $g_{r.m.}$ 是 $19.56 \text{ erg} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$ ， $T_{r.m.}$ 是 14.08°K ， $T_{r.m.}^{50}$ 是 11.66°K 。

步驟三採步驟二的結果以兩項函數 ($N = 2$) 展開，比較此狀況下參考常數變化情形。結果示於圖 4 a、b、c。大致近似於步驟一所得，仍是取參考常數大於 1 者為佳。但是取 γ 小於 1 時， $g_{r.m.}$ 比步驟一中同樣條件下誤差更大；若取 γ 大於 1 時， $g_{r.m.}$ 則略減小。 $T_{r.m.}$ 和 $T_{r.m.}^{50}$ 之誤差情形亦

類似。誤差最小為 f_2 ，取展開項數二項， $\gamma = 1$ 時， $g_{r.m.}$ 為 $19.56 \text{ erg} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$ ， $T_{r.m.}$ 為 14.08°K ， $T_{r.m.}^{50}$ 為 11.66°K 。

綜合以上結果可知，當展開項數增加時，對參考常數大於 1 者而言， $g_{r.m.}$ 值逐漸增大，但改變的有限。可是對參考常數小於 1 者而言， $g_{r.m.}$ 值會大幅減小，溫度的誤差情形相同。這表示展開項數的增加可以改善參考常數小於 1 時之誤差，却无法使參考常數大於 1 時的誤差也降低。明顯地當參考常數 γ 小於 1 時，最小平方控制反演解非常重

要。增加展開項數(N)，將愈能掌握誤差的變化，所以誤差降低。但N再增加 (N > 4)，結果並未續作明顯改善，顯然其所伴同之計算反矩陣誤差隨之增加，抵制了項數增加的效應。反之，當參考常數大於1時，平滑控制條件至為重要，展開項的增加，反抵消平滑條件控制誤差之效應，是以誤差隨之增加。

至於變化參考常數，當 γ 小於1時，會造成任意之誤差變化，無法尋得確切之控制誤差的依據。但當 γ 大於1時，變化 γ 值誤差變化不大，顯示平滑條件已控制誤差之形成，此時最小平方法控制解之重要性已大幅降低，再配與較少之展開項數，將得穩定且低之誤差。

此階段所採用函數分別為 f_2 及 f_3 ，兩者所得之結論一致，若比較其結果，仍以 f_3 所得誤差較小。此外本階段分析 $g_{r.m.}$ ， $T_{r.m.}$ 與 $T_{r.m.}^{50}$ 之經驗，指出三者之變化同步，因此在未來作更多研究分析，或實際作業時，應可以 $g_{r.m.}$ 之變化作為決定函數、項數與常數之依據。本階段中最佳之解其溫度剖面示於圖2，明顯地仍與所取項數、參考函數，均有密切關係，且逆溫之反演仍無法達到。

三. 3 第三階段研究

前兩階段研究都是利用函數展開以模擬蒲朗克函數的分布，但是函數模擬的結果並不能完全符合實際剖面，這是函數本身特性造成之影響，在目前沒有過去資料，不能找到更佳函數的情形之下，必須尋求其他方法改良實驗。

本階段將蒲朗克函數分為先驗剖面 and 偏差剖面二項，由反演蒲朗克函數的分布改為反演蒲朗克函數之偏差值分布，並將⑥式和⑧式加以修正如下：

將⑧式修改為

$$f(P) = \bar{f}(P) + \sum_{j=1}^N f_j W_j(P) \tag{13}$$

其中 $\bar{f}(P) = B_{\nu}(\bar{T}(P))$ ， $\bar{T}(P)$ 為一假定之先驗剖面。

再將⑥式改為

$$g'(\nu) = g(\nu) - \int_{P_a}^0 \bar{f}(P) K(\nu, P) dP$$

$$= \int_{P_a}^0 \left[\sum_{j=1}^N f_j W_j(P) \right] K(\nu, P) dP \tag{14}$$

是以解⑩式，改為解

$$G' = A \cdot F \tag{15}$$

明顯地， $\bar{T}(P)$ 主宰著最後所解剖面之本體，反演法所得僅作約10%左右之資料修正，是以結果將大不同於前二節之結果。如何決定 $\bar{T}(P)$ 乃為最重要之問題，最好是採最近時間的資料，或過去統計的平均資料。在本文中，乃決定選擇美國國家標準大氣溫度剖面為先驗剖面（見於圖2），並因需計算改變量的大小，而其值一般均小於溫度平均值，故所取參考函數除 f_2 與 f_3 外，加入對 f_1 之測試。實驗步驟改為變化參考常數由 10^{-15} 至10，分別對二、四及五項函數展開做實驗，以研究改良後的結果。

此階段研究結果繪於圖6 a、b 與 c。當參考常數 (γ) 介於0與1間時，若展開項數為兩項， $g_{r.m.}$ 值大且不穩定。但以四項展開時， g 值誤差迅速減小，以五項展開時 $g_{r.m.}$ 值更趨穩定。若參考常數取大於1值時，不同項數展開的 $g_{r.m.}$ 非常接近而且穩定，此時誤差的大小和項數的多寡無一定關係。此結果表示項數的增加可改善選用參考常數小於1所造成的誤差，可是對參考常數大於1者而言，並無影響。

另在實驗中發現，當參考常數取小於1時，有部分層的蒲朗克函數出現負值，在展開項為兩項時特別明顯，但項數增加後即無，表示此種參考常數的取法確實可因展開項數的增加改善溫度誤差的狀況，不過此種改善相當有限，當項數增至四項以上時，項數增加所造成的改善幾不可見。一般而言，所得之 $T_{r.m.}$ ， $T_{r.m.}^{50}$ 值均較第二階段研究中同樣條件下之誤差小，唯此時的誤差仍不穩定。若取參考常數大於1時，誤差則小而穩定，與第二階段研究同樣條件下的結果比較，誤差減少50%。誤差最小為 f_1 ， $\gamma = 1$ ， $N = 2$ ， $g_{r.m.} = 6.789 \text{ erg. sec}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$ ， $T_{r.m.} = 5.906^\circ \text{K}$ ， $T_{r.m.}^{50} = 7.039^\circ \text{K}$ 。

在研究過程中，某些參考常數小於1時所得結果甚至比參考常數大於1的結果更佳，但由於參考

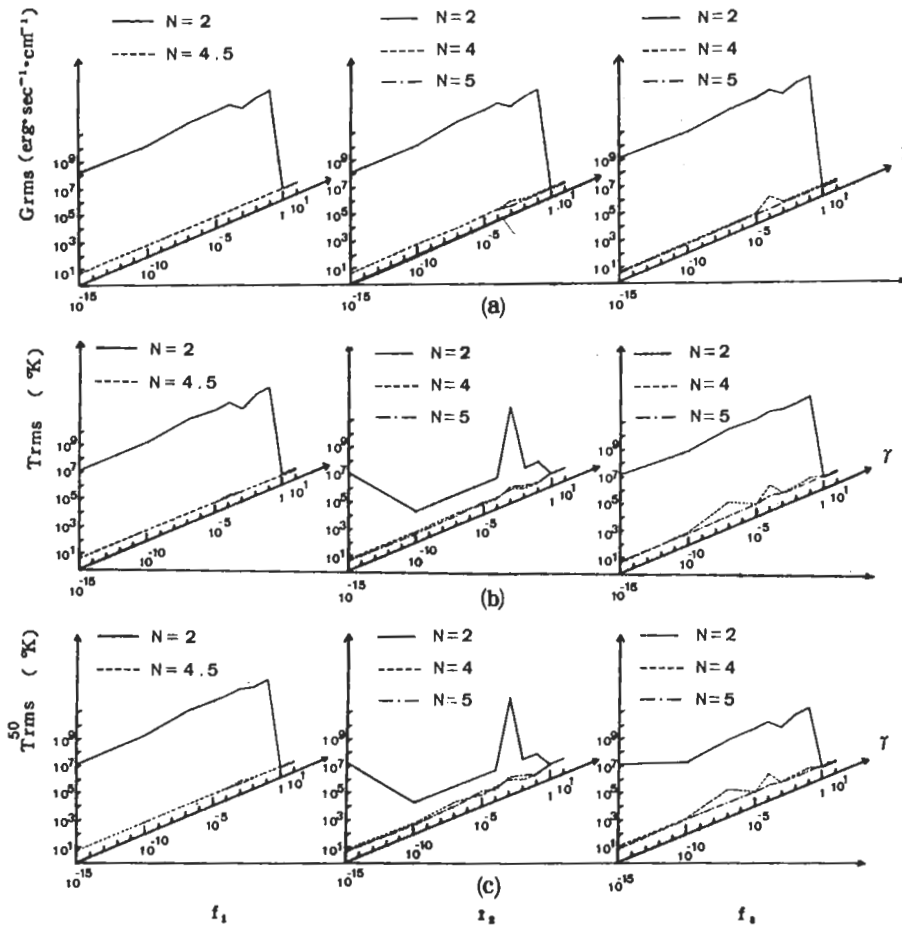


圖6 第三階段研究中，在不同函數 f 與展開項數 N 下，改變參考常數 γ 值所得 Grms
 第三階段研究中，在不同函數 f 與展開項數 N 下，改變參考常數 γ 值所得 Trms
 第三階段研究中，在不同函數 f 與展開項數 N 下，改變參考常數 γ 值所得 50 Trms
 (函數 f_1, f_2, f_3 參考表一, Grms、Trms、 50 Trms 參考 3、2 節)

常數小於 1 時的溫度誤差並不穩定，我們無法確知在何種變數的配合下會讓誤差降至最低，也因其誤差減小的有限，是以建議若依此法用於實際作業，仍以選用參考常數大於 1 者為佳。

由以上推論可知，解⑩式的方法改良了原本的“受約束之線性反演法”，使誤差大量減小。分析本研究的計算程序，可知是因為反演剖面已先取先驗剖面，垂直溫度分布形狀大致已確定，誤差只來自偏差值部分，故結果較第二階段研究為佳。比較 f_1 、 f_2 及 f_3 函數展開結果均類似，其中尤以 f_1 正弦函數展開誤差最小，表示以正弦波的函數最能模擬溫度偏差量的反演，故未來依此法運算時，將

採 f_1 為任意函數代入。反演後之最佳解示於圖 2 中，明顯地，剖面趨近圖 2 之大氣標準剖面，顯示若所取之平均剖面更趨近實際大氣剖面，則結果將更佳。

最後，有關參考係數大小對結果影響之關係，本階段仍顯示其值大於 1 時，結果最穩定且誤差小，乃表示平滑控制仍主宰結果之優劣。

由於此時吾人是在解偏離先驗剖面之偏差項，所採用之平滑條件却為控制其接近一平均剖面，故其適用性值得商榷，未來需修改之，以研究平滑條件之影響。

三、4 台北探空資料反演

本階段利用過去實際大氣的資料，代入第三階段研究的方法中，評估此法在實際作業中的準確程度，並進而判別此法應用於實際大氣的可能性。

由於此法並未考慮濃雲的方式，故挑選晴朗無雲的民國七十五年二月二十一與二十二日兩天0800的台北探空資料為研究對象，其溫度剖面示於圖7。本文以二十一日之溫度剖面當作先驗溫度剖面，並由此算出②式中的訂正係數。再以二十二日的溫度求出衛星上各波段所應測到的輻射強度，然後依⑩式反演22日的溫度剖面。因探空資料只到達100 mb，在高層乃利用美國國家標準大氣溫度剖面的數據略加修正，以符合台北冬季高空的溫度。

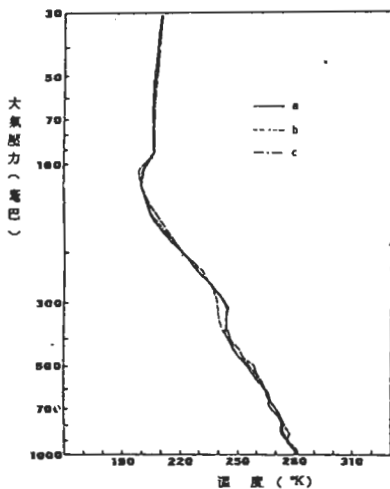


圖7 (a) —— 75年2月21日00Z 台北探空溫度剖面
(地面至100 mb) 100 mb以上採用修正標準大氣資料
(b) - - - - 75年2月22日00Z 台北探空溫度剖面
(地面至100 mb) 100 mb以上採用修正標準大氣資料
(c) - · - · 由修正之“受限之線性反演法”所反演出75年2月22日00Z 台北溫度剖面
實驗中利用以上各階段研究的成果做最適當之選擇，選定以第六頻道為②式中的參考波數，以 f_1 為展開函數，展開項數取二項，參考常數 γ 則取5。低層溫度誤差 $T_{r.m.}^{50}$ 改為計算100mb以下的溫度均方根差 $T_{r.m.}^{100}$ 。

經計算後所得結果， $g_{r.m.}$ 的值很小，並且

$T_{r.m.}$ 與 $T_{r.m.}^{50}$ 值也都小於 5°C ，此結果較第三階段研究結果更佳，這表示第三階段研究所得方法非常適用於實際大氣。但是當進一步研究此推測所得的溫度剖面，發現各層的溫度均較實際溫度高出約 4°C 左右，猜測這是由於溫度已是取平均值後再計算，而對溫度之偏差值做函數展開時又多計算了常數項，導致各層溫度值皆產生位移。

此種誤差可再做修正，運算時取相同之變數，但當展開溫度的偏差值時省略常數項。以此法算得結果較修正前又減少約60%的溫度誤差，並且此時項數改變造成的影響非常小，僅約占總誤差的10%至20%，100mb以上幾無誤差。結果見圖7。

修正後估計的大氣各層溫度相當準確， $T_{r.m.}$ 與 $T_{r.m.}^{100}$ 皆在 2°C 左右。誤差減小的原因除係經過上述誤差之修正外，亦是由於所取個案中兩日的溫度剖面近似，以致能由二十一日的資料正確推算得二十二日溫度，此項經驗可供實際反演作業中作為參考。這也顯示過去資料的收集極為重要，若有完整可信的統計結果，即可以信賴之溫度平均值或觀測值代入計算，再依本文所述方法加以修正，則“受約束之線性反演法”是可以應用於實際作業中的。臺灣四周臨海，海上探空資料缺乏，若可以依照上述方法應用於作業中，則可利用衛星遙測的結果，增進對於缺乏探空資料區域內，各種溫度變化的認識。

四、綜合討論與結論

本文分四階段研究“受約束之線性反演法”內參考波數、任意函數、展開項數、參考常數、先驗剖面等因子，對衛星遙測垂直大氣溫度剖面影響之敏感性與相關性問題，並研究應用此反演法於實際作業之可能性。

第一階段研究共完成五項實驗計算(表一)，主要發現反演得剖面之垂直分布特徵，與所選任意函數特徵極為相似。研究中因所取函數特性，反演所得高層均無實際剖面之逆溫現象。即使採用任意函數依⑥式結合成之蒲朗克函數為實際數據，仍無法獲得期望之解。猜測若能採用具代表性之函數，譬如 Wark and Fleming (1966) 所建議之經

驗正交函數，或將能降低反演誤差，並得與實際剖面特徵相似之解。此外參考波數以取遙測波段具權重函數最大值區近於地面者（第6波段—745.0 cm^{-1} ）為最佳，因其有助於降低近地層反演誤差，並降低整體誤差。另，視所取任意函數特性，積分項內應配以適當之壓力或壓力之對數值為垂直座標，以減少積分誤差。

第二階段研究將重點置於參考常數 γ 與展開項數 N 之相關性。結論為 $g_{r.m.}$ （ g 值之均方根差）適用為選擇 (γ, N) 組合之依據， $g_{r.m.}$ 愈小或愈接近測量誤差， (γ, N) 組合愈適當。此時設若限定 γ 值小於 1，則展開項數的增加，將充份反映函數估量特性，促使 $g_{r.m.}$ 值大幅減少。但當 N 大於 5 後，誤差減少緩慢，且甚而略呈增加。此乃因計算反矩陣之捨入誤差，因展開項數增加而增加，逐漸抵消反演誤差因項數增加而減少之正效應。反之當固定 N 值，而變化 γ 值於小於 1 之範圍內時， $g_{r.m.}$ 誤差值變化不穩定。總結在限制參考常數 γ 值小於 1 下，極難獲穩定且誤差小之 (γ, N) 組合。

當限定 γ 值大於 1 時，誤差大致低而穩定，不受 γ 值變化之影響。當 $N < 5$ 時，展開項數多寡並不明顯影響反演結果。此時，反演結果受平滑條件控制甚大，展開項數之增加效應並不顯著幫助誤差降低，反而所件同之計算反矩陣誤差增加，逐漸抑制平滑條件之控制效應，而終促成反演誤差 $g_{r.m.}$ 之增加（當 $N > 7$ 時）。是以，在限制 γ 值大於 1 下，將能獲取穩定且誤差小之 (γ, N) 組合，其中展開項數 N 應愈低愈佳，愈能降低計算反矩陣誤差。譬如 $(\gamma = 5, N = 2)$ ，用於實際反演系統中，應能輕易地獲取穩定且誤差小之解。

以下討論遙測誤差經⑩式而擴張之情形。設若測量 \hat{G} 值等於真實 G 值加上誤差 ϵ 值，則

$$\hat{G} = G + \epsilon \quad (10)$$

代入⑩式中，所得 F 值應具誤差 $(A^T A + \gamma H)^{-1} A^T \epsilon$ 。明顯地誤差是以 $(A^T A + \gamma H)^{-1} A^T$ 之倍率擴張。在“直接線性反演法”中， $\gamma = 0$ ，所以擴張倍率為 $(A^T A)^{-1} A^T = A^{-1}$ 。當 A 矩陣之特

徵值愈小，擴張倍率將愈大。“受約束之線性反演法”將 $A^T A$ 加上 γH ，以增加特徵值之大小，而降低擴張倍率。明顯地， γ 值愈大，擴張倍率愈低。是以在 $\gamma > 1$ 下，除使反演過程之計算誤差降低外，亦促使遙測誤差之擴張倍率降低，因此選擇 γ 大於 1 之 (γ, N) 組合應為相當恰當。不過 γ 值不能無限制增加，因為其值愈大， A 矩陣之效率愈低，也即反演所依據之輻射傳遞方程式之物理特性愈無重要性，反演的解乃失去物理依據。

第三階段研究修正原始之“受約束之線性反演法”，使原本反演實際剖面之問題，改變為反演偏差先驗剖面之偏差值計算。所以反演解為先驗剖面與偏差值剖面之和。由於偏差值剖面之大小僅佔實際剖面之 10%，是以反演誤差之降低，主要有賴於先驗剖面之適當選定。此構想為 Frotz et al (1972) 所主張，並一向應用於各不同反演系統中。

研究除證明修正後反演誤差確實降低 1 倍以上，同時亦注意到第二階段研究所得並不因採用新法而不同，即 $\gamma < 1$ 時，其變化將造成 $g_{r.m.}$ 之明顯變化，而 N 項數增加將降低誤差，但效果逐漸趨緩。當 $\gamma > 1$ 時，誤差不受 γ 、 N 之變化影響，但仍以 N 項數愈少為佳。結果顯示，修正後之反演法，仍保留原有特徵，但明顯地有助於反演誤差之降低。此外亦注意到採用正弦函數為任意函數，較其他函數能顯示偏差值剖面之變化特性，所以反演誤差較低。

最後研究採台北實際探空資料為反演對象，並取 24 小時以前資料為先驗剖面，計算過程中又修正展開方式，省略常數項，乃得 100 mb 以下 $T_{r.m.}^{100}$ 為 2.3 $^{\circ}\text{C}$ ，已近乎改進原始之“受約束之線性反演法”之誤差近 10 倍。

終結而言：“受約束之線性反演法”雖從未用於任何實際之作業性反演系統中，但本文研究指出若採用恰當之先驗剖面——譬如數值預報模式 12 小時預報，12~24 小時之探空觀測資料，並選用具代表性之任意函數——譬如經驗正交函數或本文中之正弦函數，同時選取大於 1 之 γ 值，與低函數展開

項數等，將可能獲取 T_{rm}^{100} 。接近 $2.3\text{ }^{\circ}\text{C}$ 之結果，並接近一般反演系統所能達到之程度 ($2\text{ }^{\circ}\text{C}$) (Le-Marshall, 1985)。過去一向認為此反演法太受參考常數影響且穩定性低 (Twomey, 1977)，難用於實際作業，本文研究已能克服此困難，而有利於反演系統之發展。

依據原始“受約束之線性反演法”的定義，參考常數 γ 定於 0 與 1 之間，具權衡最小平方方法與平滑控制條件的作用。本文研究與過去相似研究，一致指出 γ 值的決定極不易且不穩定，是以經反覆分析後，決議以為 γ 值大於 1，也即平滑條件約束性非常重要的情況下，將有利於應用修正後的“受約束之線性反演法”於實際作業。劉 (1986) 亦表示若要求 γ 值小於 1，且以愈近於 0 者，愈保留輻射傳遞方程式的物理約束性，將需至少 4 小時計算合理之 γ 值。此將不可能為反演作業系統所採用。而當 γ 值大於 1 時，物理約束僅微弱影響，平滑控制與先驗剖面的影響增大，此事實合乎三。3 節修正的反演法所得之偏差剖面僅為先驗剖面近 10% 左右之修正值假設，以及本文強調平滑控制之重要性的結論。總結而言，採用修正後的“受約束之線性反演法”於作業中，將以如何選取最恰當之先驗剖面，以及適當之平滑條件為研究重點。

本文僅採用 2 個不同個案作反演法中各參數變化之敏感性研究，此為反演法應用研究之起步。未來採用此法於反演作業系統中，將可觀察反演法對許多不同大氣結構之敏感性。但由於資料增多，將無法分析如本文所見個別參數之影響與相關性，僅能獲取反演法在統計資料體內之平均代表性。

誌謝

本文作者感謝曾忠一、周仲島、陳台琦與陳世照等教授們的鼓勵，與提供修改建議，並感謝林振台先生與朱友琪小姐幫忙抄稿。

參考文獻

- 劉振榮，1986 [討論]。
- 曾忠一，1983：大氣遙測原理與應用。
- 譚允中與吳冠德，1986：Satellite Remote Sensing of Temperature Profile with Constrained Linear Inversion Method, 台灣大學大氣科學系，大氣遙測課程研究報告。
- Fritz, S., D.Q. Wark, H.E. Fleming, W.L. Smith, H. Jacobowitz, D.T. Hilleary and J.C. Alishouse, 1972: Temperature sounding from satellites NOAA Tech. Rept. Ness 59. National Environmental Satellite Service. NOAA. Washington, D.C., 49pp.
- Houghton, J.T., F.W. Taylor and C.D. Rodgers, 1984: Remote sounding of atmosphere. Cambridge University Press, 343pp.
- King, J.I.F., 1956: The radiative heat transfer of planet Earth. In "Scientific Uses of Earth Satellites" 133-136 Univ. of Michigan Press, Ann Arbor.
- LeMarshall, J.F. 1985: An Intercomparison of Temperature and Moisture Fields Retrieved From TIROS Operational Vertical Sounder Data. The Technical Proceedings of The Second International TOVS Study Conference. CIMSS. 188-198.
- Liou, K.N. 1980: An Introduction to Atmospheric Radiation. Academic Press, New York, 392pp.
- McMillin, L.M., and C. Dean, 1982: Evaluation of a new operational technique for producing clear radiance. J. Appl. Meteor., 21, 1005-1014.
- Rodgers, C.D., 1976: Retrieval of atmospheric temperature and compositions from remote measurements of thermal radiation. Rev. Geophys. Space Phys. 14, 609-624.
- Tikhonov, A.N., 1963: On the solution of incorrectly stated problems and a method of regularization. Dokl. Acad. Naok. USSR. 151, 501.
- Twomey, S., 1963: On the numerical solution of Fredholm integral equations of the first by the inversion of the linear system produced by quadrature. J. ASS. Comput. Mach. 10, 97.
- Twomey, S., 1977: Introduction to the Mathematics of Inversion in Remote Sensing and Indirect Measurements. Elsevier, New York, 243pp.
- Wark, D.Q. and H.E. Fleming, 1966: Indirect measurements of atmospheric temperature profiles from satellites: II. Introduction. Mon. Wea. Rev., 94, 211-222.
- US. STANDARD ATMOSPHERE, 1976: NOAA, NASA and US AIR FORCE.

SATELLITE REMOTE SOUNDING OF ATMOSPHERIC TEMPERATURE PROFILE
— THE STUDY OF THE CONSTRAINED LINEAR INVERSION METHOD

C. M. Lu Yeun-Chung Tan

Department of Atmospheric Science
National Taiwan University

(manuscript received August 30 1986; in final form October 8 1986)

ABSTRACT

The sensitivity and the interrelativity of the factors such as the referenced wave number, any function, series expansion terms, referenced constant, a priori profile, etc., referred in the constrained linear inversion method for the satellite sounding retrieval, are carefully examined through a designed four-step research process. Further, the method is analyzed for the possibility of being used in an operational retrieval system.

The results indicate that the retrieval method can be modified to calculate the deviation of the temperature profile from a priori profile, which substantially reduces the retrieval error to one-half. Also, the retrieval result is controlled significantly by the any function chosen to represent the planck function. Hence, the selection of a statistically meaningful function — e.g. the EOF suggested by Wark and Fleming (1966), may lead to the reduction of retrieval error. Besides, when the referenced constant is set to be smaller than 1, no stable with low estimation error solution can be achieved. However, when the referenced constant is set to be greater than 1, and the series expansion terms are minimized, stable with low error solution is easily obtained. Finally, the modified method is used on retrieving the temperature profile on Feb. 22, 1986 over Taipei. The result has an error root mean square value of temperature at levels below 100 mb to be 2.3°C, which is very close to the general retrieval error of 2°C obtained by many operational retrieval system, and is about one-tenth of the error obtained from the original method.

In conclusion, the idea of modifying the retrieval method to retrieve the deviation of the temperature profile from a priori profile is originally suggested by Fritz et al (1972), and has been employed to modify many other retrieval method. The modified version along with the proper selection of the referenced constants and the series expansion terms, has overcome the difficulty recognized in the past of the uncontrollable effect of the referenced constant on influencing the retrieval error, and leads to a possible development of an operational retrieval system.